

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Забайкальский государственный университет»

**В. В. Потапов**  
**А. Н. Шеин**

**Сборник задач с решениями  
по курсу «Теория поля»**

*Учебно-методическое пособие*

Чита  
Забайкальский государственный университет  
2018

УДК 550.3(075)

ББК 26.2я7

П 64

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом  
Забайкальского государственного университета

### Рецензенты

*Д. Л. Авгулевич*, канд. геол.-минерал. наук, АО «ПитерГОРпроект»,  
г. Санкт-Петербург

*Н. О. Кожевников*, д-р геол.-минерал. наук, Новосибирский  
государственный университет, г. Новосибирск

### Потапов, Владимир Владимирович

П 64

Сборник задач с решениями по курсу «Теория поля» /  
В. В. Потапов, А. Н. Шеин ; Забайкал. гос. ун-т. – Чита : ЗабГУ,  
2018. – 120 с.

ISBN 978-5-9293-2268-6

В учебном издании рассмотрены решения задач, которые проходят на семинарских занятиях курса «Теория поля». Решения сопровождаются иллюстрациями, подробными пояснениями и математическими выкладками, необходимыми для полного понимания решений.

Сборник задач предназначен для студентов специальности 21.05.03 *Технология геологической разведки*, по специализации «*Геофизические методы поиска и разведки месторождений полезных ископаемых*». Книга может быть полезна геофизикам-интерпретаторам, а также при изучении дисциплин «*Электроразведка*», «*Сейсморазведка*», «*Комплексирование геофизических методов*», «*Разведочная геофизика*».

УДК 550.3(075)

ББК 26.2я7

ISBN 978-5-9293-2268-6

© Забайкальский государственный  
университет, 2018

## Оглавление

Введение .....	4
1. Определения, понятия, математический аппарат .....	6
<i>Задачи</i> .....	12
2. Статические поля .....	22
<i>Задачи (закон Кулона)</i> .....	27
<i>Задачи (закон Гаусса)</i> .....	39
3. Статические поля в присутствии среды .....	70
<i>Задачи</i> .....	75
4. Магнитное поле постоянного тока .....	89
<i>Задачи</i> .....	96
Заключение .....	118
Библиографический список .....	119

## Введение

Курс «Теория поля» является основополагающим курсом для всех геофизиков. Без понимания того, как ведут себя физические поля, нельзя стать квалифицированным специалистом, причём эти знания необходимы практикам и теоретикам.

Фактический курс «Теория поля» основан на курсе лекций А. Д. Каринского [3], читаемого в МГРИ-РГГРУ, и включает ряд разделов «Теоретической физики», наиболее значимых для студентов-геофизиков геологоразведочного вуза. В разведочной геофизике изучают характеристики различных физических полей: гравитационного (гравиразведка), магнитостатического (магниторазведка), стационарного электрического (электроразведка), стационарного магнитного (электроразведка), переменного электромагнитного (электроразведка), а также поля упругих колебаний (сейсморазведка). Несмотря на различие в физической природе этих полей, их математическое описание может основываться на общем подходе, что позволяет выяснить, какие общие свойства присущи многим изучаемым в разведочной геофизике полям и в чём их принципиальные различия.

Опыт преподавания курса «Теория поля» на горном факультете Забайкальского государственного университета показал авторам данного пособия некоторые особенности в восприятии подобного материала студентами. Эти особенности в основном связаны с решением задач.

Решение задач по физике в школе часто основывается на том, чтобы подставлять численные значения в формулы и не задумываться о том, откуда взялось то или иное уравнение. Когда бывшие школьники

приходят в вуз и слушают теоретический курс по физике, они воспринимают его отдельно от решения задач, часто совсем не понимая, как усвоенные на лекциях сложные уравнения применить при решении простых задач, которые им преподавали в школе.

Именно для устранения этих пробелов и создан сборник. В нём решаются типичные задачи по физике, но с использованием именно тех сложных уравнений, которые рассматриваются в теоретической части курса «Теория поля». Авторы пособия постарались максимально подробно описать все решения, проиллюстрировать их качественными рисунками, чтобы весь путь размышлений, начиная от того, какие начальные уравнения применимы для данной задачи, до получения конечного ответа, был полностью освещён.

Большое внимание уделено тому, как можно упростить решения задач, используя соображения симметрии и понимание того, как должны вести себя физические поля в каждой конкретной задаче.

В начале каждого раздела даны определения, основные физические соотношения и краткие теоретические выкладки для основных уравнений, используемых при решении задач в этом разделе. Всё, что представлено в теоретической части каждой темы, подробно излагается на лекционных занятиях основано на курсе лекций А. Д. Каринского [3].

Авторы надеются, что данное издание поможет не только студентам-геофизикам, но и всем, кто изучает курс «Теории поля» в вузе, лучше понять связь между теоретическими выкладками и решением практических задач на основе этих выкладок.

## 1. Определения, понятия, математический аппарат

Скалярная величина  $T$  – число, а также – размерность (если  $T$  – не безразмерная величина). Примерами скалярных величин являются напряжение  $\varepsilon(B)$  электрического поля  $\vec{E}$  в цепи электрического тока, ток  $I(A)$  в этой цепи и её сопротивление  $R(\text{Ом})$ . Очевидно, что действия сложения и вычитания применимы к таким величинам только в том случае, если они имеют одинаковую размерность. При перемножении или делении таких величин тем же действиям подвергаются их размерности. Например, по закону Ома  $\varepsilon(B) / R(\text{Ом}) = I(B/\text{Ом}) = I(A)$ .

Векторную величину (вектор)  $\vec{M}$  характеризуют её абсолютная величина  $|\vec{M}| = M$  и направление, либо три скалярные величины  $M_1, M_2, M_3$  – скалярные компоненты вектора в системе координат. Как и для скаляров, сложение или вычитание векторов (либо их компонент) возможно только при одинаковой размерности векторов. При умножении или делении вектора  $\vec{M}$  на скаляр  $T$  тем же действиям подвергаются размерности  $\vec{M}$  и  $T$ . Например, если  $\vec{F}$  – сила, действующая на массу  $m$ , а  $\vec{a}$  – ускорение, то по 2-му закону Ньютона  $\vec{a} = \vec{F} / m$ , где размерности:  $[F] = \text{Н}$ ,  $[m] = \text{кг}$ ,  $[a] = \text{Н/кг} = \text{м/с}^2$ .

Произведение скаляра  $T$  и вектора  $\vec{M}$ :  $T \cdot \vec{M} = \vec{A}$ , где  $\vec{A}$  – вектор с абсолютной величиной  $|\vec{A}| = A = |T| \cdot M$ . При  $T > 0$  имеем  $\vec{A} \parallel \vec{M}$  (направления  $\vec{A}$  и  $\vec{M}$  одинаковы). При  $T < 0$   $\vec{A} \updownarrow \vec{M}$  (вектор  $\vec{A}$  антипараллелен вектору  $\vec{M}$ ) (см. рис. 1.1).

Скалярное произведение векторов:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{A} \cdot \vec{B}) = T,$$

где скаляр  $T = A \cdot B \cdot \cos(\vec{A} \cdot \vec{B})$ . Если угол между направлениями векторов  $\vec{A}, \vec{B}$  – острый (или равен  $0^\circ$ ), то  $T > 0$ , а если этот угол – тупой (или равен  $180^\circ$ ), то  $T < 0$ . Если же этот угол прямой ( $90^\circ$ ), то  $T = 0$  (см. рис. 1.1).

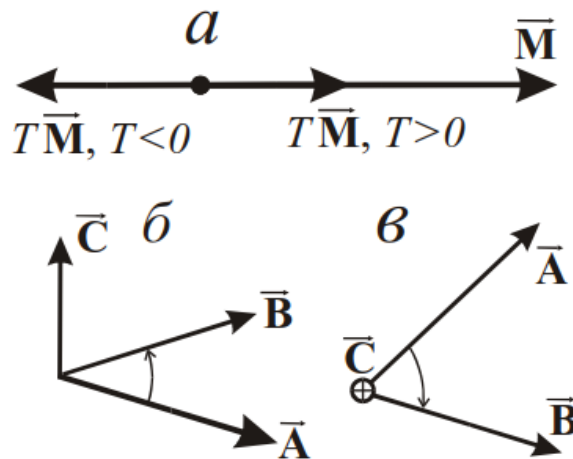


Рис. 1.1

Векторное произведение векторов:

$$\vec{A} \times \vec{B} = [\vec{A} \cdot \vec{B}] = \vec{C},$$

где  $C$  – вектор с абсолютной величиной  $C = A \cdot B \cdot \sin(\vec{A} \cdot \vec{B})$ . Направление вектора  $C$  определяет следующее правило:  $\vec{C} \perp \vec{A}, \vec{C} \perp \vec{B}$ , и векторы  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  образуют правую тройку (см. рис. 1.1). Последнее означает, что если повернуть вектор  $\vec{A}$  на угол, меньший, чем  $180^\circ$ , до направления вектора  $\vec{B}$ , то направление вектора  $\vec{C}$  определяет правило «правого винта».

Скалярное поле  $T(a)$  в каждой точке  $a$  характеризует скалярная величина  $T$ , то есть число (а также размерность в системе физических единиц). Примеры таких полей: температура  $t^\circ$  (в градусах Цельсия, или в других градусах), объёмная плотность масс  $\delta$  (в  $\text{кг}/\text{м}^3$ ), потенциал  $U$

электрического поля (в В (вольтах)). Геометрически распределение скалярного поля  $T$  в пространстве бывает можно представить при помощи уровнях поверхностей  $T = const$ . Их сечение другой поверхностью  $S$  (плоскостью чертежа, поверхностью Земли) даёт изолинии  $T = const$  скалярного поля  $T$  на поверхности  $S$ .

Векторное поле  $\vec{M}(a)$  в каждой точке  $a$  характеризует вектор  $\vec{M}$ . Примеры векторных полей: напряжённости гравитационного ( $\vec{G}$ ), электрического ( $\vec{E}$ ), магнитного ( $\vec{H}$ ) полей. Понятно, что как и векторную величину  $\vec{M}$ , векторное поле  $\vec{M}(a)$  в каждой точке  $a$  характеризует абсолютная величина  $|\vec{M}|(a) = M(a)$  и направление вектора  $\vec{M}(a)$ , либо три скалярных поля – скалярные компоненты  $M_1(a), M_2(a), M_3(a)$  поля  $\vec{M}(a)$  в системе координат.

Градиент ( $grad$ ) – первая пространственная производная скалярного поля  $T$ . Производная  $grad T(a)$  – векторное поле,  $grad T(a)$  – вектор, имеющий направление наиболее резкого (интенсивного) возрастания поля  $T$  в окрестности точки  $a$  и абсолютную величину, равную производной поля  $T$  по направлению  $grad T$ . Если, например, вектор  $grad T$  направлен по оси  $X$ , то  $grad T = dT/dx$ .

Выражение для вектора  $grad T$  в декартовых координатах  $x, y, z$ :

$$grad T = \vec{i}_x \frac{dT}{dx} + \vec{i}_y \frac{dT}{dy} + \vec{i}_z \frac{dT}{dz}.$$

Дивергенция ( $div$ ) – 1-я пространственная (скалярная) производная векторного поля  $\vec{M}$ . Производная  $div \vec{M}(a)$  – скалярное поле. По определению

$$div \vec{M}(a) = \frac{\int_{S[dV]} (\vec{M} \cdot \vec{dS})}{dV},$$

где точка  $a$  – центр бесконечно-малой области пространства с объёмом  $dV$ , а  $S[dV]$  – ограничивающая эту область замкнутая поверхность.



Применяя определение дивергенции к координатному элементу объёма – прямоугольному параллелепипеду с рёбрами  $dl_1, dl_2, dl_3$  в ортогональных координатах, можно выразить  $\operatorname{div} \vec{M}$  через производные. В частности, в декартовых координатах, где  $dl_1 = dx, dl_2 = dy, dl_3 = dz$ ,  $\vec{M} = \vec{i}_x M_x + \vec{i}_y M_y + \vec{i}_z M_z$ , пространственная производная

$$\operatorname{div} \vec{M} = \frac{dM_x}{dx} + \frac{dM_y}{dy} + \frac{dM_z}{dz}.$$

Ротор – первая пространственная (векторная) производная векторного поля  $\vec{M}$ . Производная  $\operatorname{rot} \vec{M}(a)$  – векторное поле. По определению скалярная компонента вектора  $\operatorname{rot}$  направлению  $n$ :

$$\operatorname{rot}_n \vec{M}(a) = \frac{\oint_{l[dS]} (\vec{M} \cdot d\vec{l})}{dS},$$

где  $n$  – нормаль к элементарной площадке  $dS$  (с центром в точке  $a$ ), ограниченной замкнутой линией  $l[S]$ . Направление обхода по линии  $l[dS]$  образует правовинтовую систему с направлением  $n$ .

Применяя определение ротора можем выразить в декартовых координатах скалярную и векторную компоненту поля  $\operatorname{rot} \vec{M}$  по направлению оси  $X$  получаем:

$$\operatorname{rot}_x \vec{M} = \frac{dM_z}{dy} - \frac{dM_y}{dz}, \quad \operatorname{rot}_x \vec{M} = \vec{i}_x \left( \frac{dM_z}{dy} - \frac{dM_y}{dz} \right).$$

Подобным образом можем определить две другие векторные компоненты для  $\operatorname{rot} \vec{M}$ . Складывая векторные компоненты, получаем выражение для  $\operatorname{rot} \vec{M}$  в декартовых координатах:

$$\operatorname{rot} \vec{M} = \vec{i} \cdot \left( \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left( \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left( \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right).$$

Поток  $\Psi$  вектора  $\vec{M}$  через поверхность  $S$  определяет интеграл по этой поверхности (см. рис. 1.2):

$$\Psi = \int_S d\Psi,$$

то есть

$$\Psi = \int_S (\vec{M} \cdot \vec{dS}).$$

Из этого определения следует, что поток  $\Psi$  – скалярная величина, которая может быть положительной, отрицательной или равной нулю.

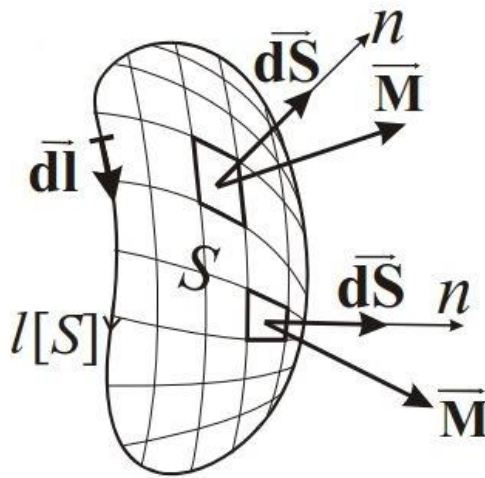


Рис. 1.2

Поток  $\Psi$  поля  $\vec{M}$  через замкнутую поверхность  $S[V]$ , ограничивающую область пространства  $V$ , будем обозначать следующим образом:

$$\Psi = \oint_{S[V]} (\vec{M} \cdot \vec{dS}).$$

Напряжение  $E_{12}$  на пути  $l$  из точки "1" в точку "2" (направленной линии  $l$  с началом в точке "1" и концом в точке "2") определяет криволинейный интеграл (см. рис. 1.3, 1):

$$E_{12} = \int_1^2 (\vec{M} \cdot \vec{dl}).$$

Понятно, что в зависимости от направлений поля  $\vec{M}$  в точках линии  $l$  и направлений её элементарных отрезков  $\vec{dl}$  скалярная величина  $E$  может быть положительной, отрицательной ли равной нулю.

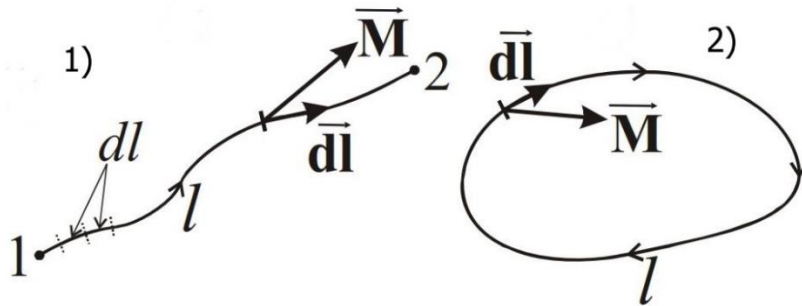


Рис. 1.3

Циркуляция  $\mathcal{C}$  – это напряжение векторного поля на замкнутой направленной линии  $l$  (то есть при заданном направлении перемещения точки по этой линии) (см. рис. 1.3, 2):

$$\mathcal{C} = \oint_l (\vec{M} \cdot \vec{dl}).$$

Если  $rot \vec{M} \equiv 0$ ,  $div \vec{M} \neq 0$ , то поле  $\vec{M}$  – потенциальное (безвихревое).

Если  $rot \vec{M} \neq 0$ ,  $div \vec{M} \equiv 0$  то поле  $\vec{M}$  – соленоидальное (чисто вихревое).

При  $rot \vec{M} \neq 0$ ,  $div \vec{M} \neq 0$  поле  $\vec{M}$  обычно называют вихревым, а при  $rot \vec{M} \equiv 0$ ,  $div \vec{M} \equiv 0$  – лапласовым.

## Задачи

1) Скалярное поле задано как  $T = x + 2y$ . Найти  $\text{grad } T$ .

Решение:

$$\text{grad } T = \vec{i} \cdot \frac{\partial(x + 2y)}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial(x + 2y)}{\partial y} = \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$$

Ответ:  $\text{grad } T = \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$ .

2) Векторное поле задано как  $\vec{M} = x^2 \cdot \vec{i} + 2y^3 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$ . Найти  $\text{div } \vec{M}$  и  $\text{rot } \vec{M}$ .

Решение:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{M} &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(2y^3)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z} = 2x + 6y^2; \\ \text{rot } \vec{M} &= \vec{i} \cdot \left( \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left( \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left( \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \Rightarrow \\ \text{rot } M_x &= \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = \frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(2y^3)}{\partial z} = 0; \\ \text{rot } M_y &= \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = \frac{\partial(x^2)}{\partial z} - \frac{\partial(0)}{\partial x} = 0; \\ \text{rot } M_z &= \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} = \frac{\partial(2y^3)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial y} = 0; \Rightarrow \\ \text{rot } \vec{M} &= \vec{i} \cdot 0 + \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Ответ:  $\text{div } \vec{M} = 2x + 6y^2$ ;  $\text{rot } \vec{M} = 0$ . Поле является потенциальным, поскольку ротор тождественно равен 0, а дивергенция не равна 0.

3) Векторное поле задано как  $\vec{M} = 2y^3 \cdot \vec{i} + x^2 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$ . Найти  $\text{div } \vec{M}$ ,  $\text{rot } \vec{M}$ .

Решение:

$$\operatorname{div} \vec{M} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = \frac{\partial(2y^3)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0;$$

$$\operatorname{rot} \vec{M} = \vec{i} \cdot \left( \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left( \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left( \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \Rightarrow$$

$$\operatorname{rot} M_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = \frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2)}{\partial z} = 0;$$

$$\operatorname{rot} M_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = \frac{\partial(2y^3)}{\partial z} - \frac{\partial(0)}{\partial x} = 0;$$

$$\operatorname{rot} M_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2y^3)}{\partial y} = 2x - 6y^2; \Rightarrow$$

$$\operatorname{rot} \vec{M} = \vec{i} \cdot 0 + \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot (2x - 6y^2) = \vec{k} \cdot (2x - 6y^2).$$

Ответ:  $\operatorname{div} \vec{M} = 0$ ;  $\operatorname{rot} \vec{M} = \vec{k} \cdot (2x - 6y^2)$ . Поле является соленоидальным, поскольку дивергенция тождественно равна 0, а ротор не равен 0.

4) Векторное поле задано как  $\vec{M} = \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ . Найти

$\operatorname{div} \vec{M}, \operatorname{rot} \vec{M}$ .

Решение:

$$\operatorname{div} \vec{M} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = \frac{\partial \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{\partial y} +$$

$$\frac{\partial \left( \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{\partial z} = \left\{ \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \right\} =$$

$$\frac{(x)' \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \left( (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \right)'}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(y)' \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - y \cdot \left( (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \right)'}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + \\
& \frac{(z)' \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - z \cdot \left( (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \right)'}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \\
& \frac{x \cdot \frac{3}{2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y \cdot \frac{3}{2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + \\
& \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{z \cdot \frac{3}{2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \\
& \frac{3x^2 + 3y^2 + 3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 3 \left( \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right) = \\
& 3 \left( \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 0;
\end{aligned}$$

Найдем  $\text{rot } \vec{M}$ .

$$\begin{aligned}
\text{rot } \vec{M} &= \vec{i} \cdot \left( \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left( \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left( \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \Rightarrow \\
\text{rot } M_x &= \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = \frac{\partial \left( \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left( \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{\partial z} \\
&= \left\{ \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \right\} = \\
&= \left( \frac{0 \cdot \left( (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \right)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} - \frac{z \cdot 2y \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \right) \\
&- \left( \frac{0 \cdot \left( (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \right)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} - \frac{y \cdot 2z \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-z \cdot 2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{y \cdot 2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{0}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0; \\
\text{rot } M_y &= \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = \frac{\partial \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left( \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{\partial z} \\
&= \left\{ \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \right\} \\
&= \left( \frac{0 \cdot \left( (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \right) - x \cdot 2z \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \right) \\
&\quad - \left( \frac{0 \cdot \left( (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \right) - z \cdot 2x \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \right) \\
&= \frac{-x \cdot 2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{z \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{0}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0; \\
\text{rot } M_z &= \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} = \frac{\partial \left( \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{\partial z} \\
&= \left\{ \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \right\} \\
&= \left( \frac{0 \cdot \left( (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \right) - y \cdot 2x \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \right) \\
&\quad - \left( \frac{0 \cdot \left( (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \right) - x \cdot 2y \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \right) \\
&= \frac{-y \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{x \cdot 2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{0}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\
&= 0; \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\text{rot } \vec{M} = \vec{i} \cdot 0 + \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot 0 = 0.$$

Ответ:  $\operatorname{div} \vec{M} = 0$ ;  $\operatorname{rot} \vec{M} = 0$ . Поле является лапласовым, поскольку дивергенция тождественно равна 0, и ротор тождественно равен 0.

5) Векторное поле задано как  $\vec{M} = \frac{x^2 \cdot \vec{i} + y^2 \cdot \vec{j} + z^2 \cdot \vec{k}}{x+y+z}$ . Найти  $\operatorname{div} \vec{M}$  и  $\operatorname{rot} \vec{M}$ .

Решение:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{M} &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = \frac{\partial \left( \frac{x^2}{x+y+z} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \frac{y^2}{x+y+z} \right)}{\partial y} + \\ &\frac{\partial \left( \frac{z^2}{x+y+z} \right)}{\partial z} = \left\{ \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \right\} = \frac{2x \cdot (x+y+z) - x^2 \cdot (x+y+z)'}{(x+y+z)^2} + \\ &\frac{2y \cdot (x+y+z) - y^2 \cdot (x+y+z)'}{(x+y+z)^2} + \frac{2z \cdot (x+y+z) - z^2 \cdot (x+y+z)'}{(x+y+z)^2} = \\ &\frac{2x \cdot (x+y+z) - x^2}{(x+y+z)^2} + \frac{2y \cdot (x+y+z) - y^2}{(x+y+z)^2} + \frac{2z \cdot (x+y+z) - z^2}{(x+y+z)^2} = \\ &\frac{2x \cdot (x+y+z) + 2y \cdot (x+y+z) + 2z \cdot (x+y+z)}{(x+y+z)^2} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x+y+z)^2} = \\ &\frac{(x+y+z)(2x+2y+2z)}{(x+y+z)^2} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x+y+z)^2} = 2 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x+y+z)^2}; \end{aligned}$$

Найдем  $\operatorname{rot} \vec{M}$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{M} &= \vec{i} \cdot \left( \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \cdot \left( \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left( \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \Rightarrow \\ \operatorname{rot} M_x &= \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = \frac{\partial \left( \frac{z^2}{x+y+z} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left( \frac{y^2}{x+y+z} \right)}{\partial z} \\ &= \left\{ \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \right\} \\ &= \left( \frac{0 \cdot (x+y+z)}{(x+y+z)^2} - \frac{z^2}{(x+y+z)^2} \right) \\ &- \left( \frac{0 \cdot (x+y+z)}{(x+y+z)^2} - \frac{y^2}{(x+y+z)^2} \right) = \frac{y^2 - z^2}{(x+y+z)^2}; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{rot} M_y &= \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = \frac{\partial \left( \frac{x^2}{x+y+z} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left( \frac{z^2}{x+y+z} \right)}{\partial z} \\ &= \left\{ \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \right\} \\ &= \left( \frac{0 \cdot (x+y+z)}{(x+y+z)^2} - \frac{x^2}{(x+y+z)^2} \right) \\ &\quad - \left( \frac{0 \cdot (x+y+z)}{(x+y+z)^2} - \frac{z^2}{(x+y+z)^2} \right) = \frac{z^2 - x^2}{(x+y+z)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} M_x &= \frac{\partial M_y}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial y} = \frac{\partial \left( \frac{y^2}{x+y+z} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left( \frac{z^2}{x+y+z} \right)}{\partial z} \\ &= \left\{ \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \right\} \\ &= \left( \frac{0 \cdot (x+y+z)}{(x+y+z)^2} - \frac{y^2}{(x+y+z)^2} \right) \\ &\quad - \left( \frac{0 \cdot (x+y+z)}{(x+y+z)^2} - \frac{z^2}{(x+y+z)^2} \right) = \frac{z^2 - y^2}{(x+y+z)^2}; \end{aligned}$$

Ответ:  $\operatorname{div} \vec{M} = 2 - \frac{x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}; \operatorname{rot} \vec{M} = \vec{i} \cdot \frac{y^2-z^2}{(x+y+z)^2} + \vec{j} \cdot$

$\frac{z^2-x^2}{(x+y+z)^2} + \vec{k} \cdot \frac{z^2-y^2}{(x+y+z)^2}$ ). Поле является вихревым, поскольку дивергенция не равна 0, и ротор не равен 0.

б) Найти чему равна  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A}$ , где  $\vec{A}$  любое векторное поле.

Решение:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} &= \vec{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} &= \frac{\partial \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y}. \end{aligned}$$

Будем считать, что выполняются условия непрерывности в любой точке [6, с. 405] см. теорему, тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x}; & \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x}; & \Rightarrow \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = \\ &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} = \\ &= \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} \right) + \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} \right) \\ &= 0 + 0 + 0 \equiv 0 \end{aligned}$$

Ответ:  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} \equiv 0$ .

7) Найти чему равен  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} A$ , где  $A$  любое скалярное поле.

Решение:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} A &= \vec{i} \frac{\partial A}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial A}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial A}{\partial z}; \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} A &= \vec{i} \left( \frac{\partial \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right)}{\partial x} \right) \\ &\quad + \vec{k} \left( \frac{\partial \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)}{\partial y} \right) \\ &= \vec{i} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial y} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} \right). \end{aligned}$$

Будем считать, что выполняются условия непрерывности в любой точке [6, с. 405] см. теорему, тогда:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial x}; \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \operatorname{grad} A &= \vec{i} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial y} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} \right) \\
&= \vec{i} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \right) \\
&= \vec{i} \cdot 0 + \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot 0 \equiv 0
\end{aligned}$$

Ответ:  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} A \equiv 0$ .

8) Доказать что  $\Delta \vec{A} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}$ , где  $A$  любое векторное поле.

Решение:

Выпишем чему равен  $\Delta \vec{A}$ .

$$\begin{aligned}
\Delta \vec{A} &= \vec{i} \Delta A_x + \vec{j} \Delta A_y + \vec{k} \Delta A_z \\
&= \vec{i} \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \\
&\quad + \vec{k} \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right).
\end{aligned}$$

Найдем чему равен  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}$ :

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} &= \operatorname{grad} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\
&= \vec{i} \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} \right) \\
&\quad + \vec{k} \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial z} \right).
\end{aligned}$$

Найдем чему равен  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}$ :

$$\begin{aligned}
\text{rot rot } \vec{A} &= \text{rot} \left( \vec{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right) \\
&= \vec{i} \left( \frac{\partial \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)}{\partial z} \right) \\
&\quad + \vec{j} \left( \frac{\partial \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)}{\partial x} \right) \\
&\quad + \vec{k} \left( \frac{\partial \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)}{\partial y} \right) \\
&= \vec{i} \left( \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} \right) \\
&\quad + \vec{j} \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial z} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} \right) \\
&\quad + \vec{k} \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial x} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} \right); \Rightarrow \\
&\quad \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A} \\
&= \vec{i} \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} \right) \\
&\quad + \vec{j} \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} \right) \\
&\quad + \vec{k} \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} \right) = \\
&= \vec{i} \left( \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial z} \right) + \left( \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} \right) \right) \\
&\quad + \vec{j} \left( \left( \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial z} \right) + \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} \right) \right) \\
&\quad + \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} \right) \\
&\quad + \vec{k} \left( \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial z} \right) + \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} \right) \right) \\
&\quad + \left( \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} \right).
\end{aligned}$$

Будем считать, что выполняются условия непрерывности в любой точке [6, с. 405] см. теорему, тогда:

$$\begin{aligned}
 & \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A} \\
 &= \vec{i} \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial z} \right) \\
 &+ \vec{k} \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial z} \right) \\
 &= \vec{i} \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \\
 &+ \vec{k} \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right).
 \end{aligned}$$

Сравнив выражения  $\Delta \vec{A}$  и  $\text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A}$ , можно увидеть что они тождественно равны, поэтому:

$$\Delta \vec{A} \equiv \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A}$$

*Ответ:*  $\Delta \vec{A} \equiv \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A}$ .

## 2. Статические поля

Статическое поле – это постоянное поле, источники которого неподвижны. В данном случае, употребляя термин «в вакууме», будем подразумевать отсутствие среды – таких тел (объектов), которые оказывают влияние на поле, а сами по себе (в отсутствие поля) эти тела могут поля не создавать.

Объёмную плотность  $\delta$  массы  $dm$  в  $dV$  и элементарную объёмную массу  $dm$  определяют выражения:  $\delta = dm/dV$ ,  $dm = \delta/dV$ . Массу  $m_V$  в области пространства  $V$  определяет сумма  $dm$  (см. рис. 2.1–1):

$$m_V = \int_V dm = \int_V \delta dV.$$

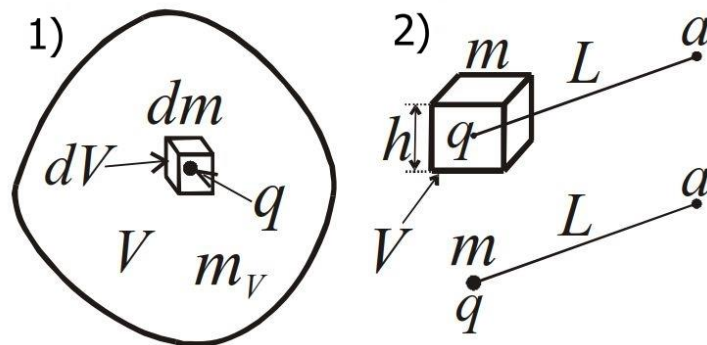


Рис. 2.1

Точечная масса. Пусть объёмная масса с «центром тяжести» в точке  $q$  имеет (максимальный) линейный размер  $h$ , а точка наблюдения  $a$  находится на расстоянии  $L = L_{qa}$  от расположенной внутри массы  $m$

точки  $q$ , и  $L \gg h$ . Тогда, вместо объёмной массы  $m$ , в точке  $q$  будет расположена точечная масса  $m$ , конечная по величине, но имеющая бесконечно малые размеры (см. рис. 2.1–2).

Линейная масса. Пусть объёмная масса  $m_V$  имеет большую протяжённость вдоль линии  $l$  по сравнению линейными размерами её поперечного сечения (см. рис. 2.2–1). Массу  $dm$  в объёме  $dV = \Delta S \cdot dl$  определяет выражение  $dm = \delta \cdot dV = \delta \cdot \Delta S \cdot dl$ , где  $\delta$  – средняя объёмная плотность в  $dV$ . Для такой массы удобно воспользоваться понятием «линейная плотность»  $\lambda = \delta \cdot \Delta S = dm/dl$ , а масса  $dm = \lambda dl$ . Если  $L \gg h$  можем заменить поле объёмной массы с большой протяжённостью вдоль линии  $l$  линейной массой на линии  $l$ . Для этого, не меняя положения  $l$  и распределения  $\lambda$  на  $l$ , перейдём к пределам:  $h \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow \infty$ . Элемент  $dm$  линейной массы на отрезке  $dl$ :  $dm = \lambda \cdot dl$  (см. рис. 2.2–2).

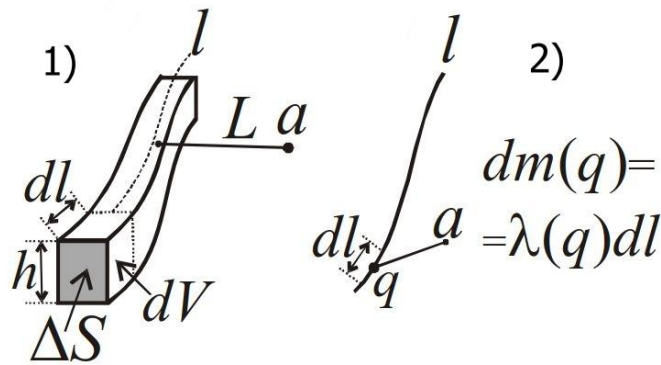


Рис. 2.2

Поверхностная масса (в виде простого слоя). Рассмотрим случай, когда объёмная масса (или заряд) представляет собой слой, один из линейных размеров которого – толщина слоя  $h$  – много меньше двух других размеров, а  $S$  – проходящая внутри слоя (по его «простирацию») поверхность (см. рис. 2.3–1). Масса показанного на этом рисунке элемента объёма  $dV$  с центром в точке  $q$ :  $dm = \delta \cdot dV = \delta \cdot h \cdot dS = \sigma \cdot dS$ , где  $\delta$  – средняя объёмная плотность в  $dV$ , а  $\sigma = \delta \cdot h = (dm / dS)$  – поверхностная плотность массы. Если  $L \gg h$ , то можем изменить такую объёмную массу (в виде тонкого слоя) поверхностной массой с поверхностной плотностью  $\sigma$  (см. рис. 2.3–2). При этом элементарную массу  $dm$  на площадке

$dS$  определяет выражение:  $dm = \sigma \cdot dS$ . Поверхностную массу с поверхностной плотностью  $\sigma$  называют «простой слой».

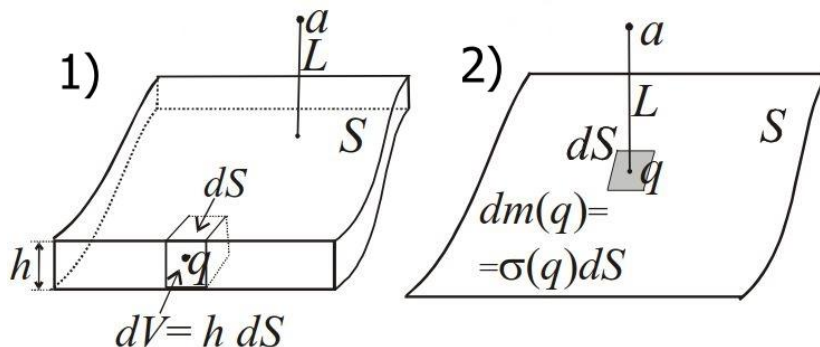


Рис. 2.3

Итак, элементарные объемные, линейные и поверхностные массы  $dm$  определяют выражения:

$$Dm = \delta dV, \quad dm = \lambda \cdot dl, \quad dm = \sigma \cdot dS.$$

Массы, одинаковые по физической природе, взаимодействуют по закону Кулона-Ньютона. Если  $m_1, m_2$  – точечные массы (либо точечные электрические заряды, точечные магнитные полюса), то сила действия массы  $m_1$  на массу  $m_2$ :

$$\vec{F}_{12} = \vec{l}_{L_{12}} v \frac{m_1 \cdot m_2}{L_{12}^2} = v \frac{m_1 \cdot m_2}{L_{12}^3} \vec{L}_{12},$$

где единичный вектор  $\vec{l}_{L_{12}} = \frac{\vec{L}_{12}}{L_{12}}$ , а  $v$  – константа, зависящая от физической природы масс (а также системы физических единиц) (см. рис. 2.4, 1).

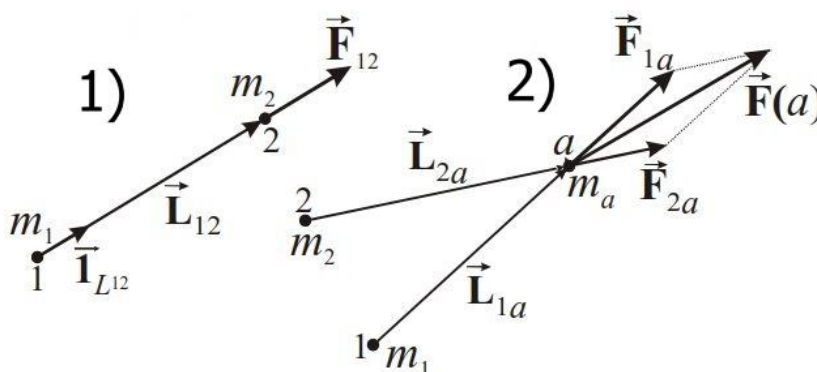


Рис. 2.4



Пусть на массу  $m_a$ , находящуюся в точке  $a$ , действуют силы  $\vec{F}_{1a}$ ,  $\vec{F}_{2a}$ , обусловленные наличием масс  $m_1, m_2$  (см. рис. 2.4–2). Тогда сила  $\vec{F}(a)$ , действующая на  $m_a$ , равна сумме сил  $\vec{F}_{1a}$  и  $\vec{F}_{2a}$ :

$$\vec{F}(a) = \vec{F}_{1a} + \vec{F}_{2a} = \nu \frac{m_1 \cdot m_a}{L_{1a}^3} \vec{L}_{1a} + \nu \frac{m_2 \cdot m_a}{L_{2a}^3} \vec{L}_{2a},$$

или  $\vec{F}(a) = \nu m_a \vec{f}(a)$ , где  $\vec{f}(a) = \frac{m_1}{L_{1a}^3} \vec{L}_{1a} + \frac{m_2}{L_{2a}^3} \vec{L}_{2a}$  – поле  $\vec{f}$  масс  $m_1, m_2$  в точке  $a$ .

Когда большое количество разных масс (см. рис. 2.5), то каждая элементарная масса  $dm_q$  действует на массу  $m_a$  с силой:

$$\vec{dF}_{qa} = \nu \frac{dm_q \cdot m_a}{L_{qa}^3} \vec{L}_{qa}.$$

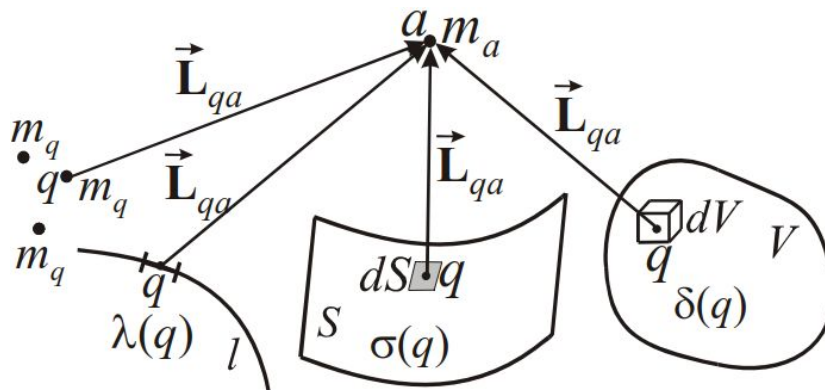


Рис. 2.5

Суммируя все силы, получаем выражение для силы, действующей на  $m_a$ :  $\vec{F}(a) = \nu m_a \vec{f}(a)$ , где поле:

$$\vec{f}(a) = \sum \frac{m_q}{L_{qa}^3} \vec{L}_{qa} + \int_V \frac{\delta(q) \vec{L}_{qa}}{L_{qa}^3} dV + \int_S \frac{\sigma(q) \vec{L}_{qa}}{L_{qa}^3} dS + \int_l \frac{\lambda(q) \vec{L}_{qa}}{L_{qa}^3} dl.$$

Скалярную компоненту  $f_k(a)$  поля  $\vec{f}(a)$ , создаваемого совокупностью различных масс, определяет выражение:

$$\begin{aligned}
f_k(a) = & \sum \frac{m_q}{L_{qa}^2} \cos(\overrightarrow{L_{qa}}, \overrightarrow{l_k}) \\
& + \int_V \frac{\delta(q) \cos(\overrightarrow{L_{qa}}, \overrightarrow{l_k}) dV}{L_{qa}^2} + \int_S \frac{\sigma(q) \cos(\overrightarrow{L_{qa}}, \overrightarrow{l_k}) dS}{L_{qa}^2} \\
& + \int_l \frac{\lambda(q) \cos(\overrightarrow{L_{qa}}, \overrightarrow{l_k}) dl}{L_{qa}^2}.
\end{aligned}$$

Интегрирование проводится по тем областям пространства  $V$ , поверхностям  $S$ , линиям  $l$ , где имеются соответственно объёмные ( $\delta$ ), поверхностные ( $\sigma$ ), линейные ( $\lambda$ ) массы.

Совокупность любых масс можем представить, как сумму точечных масс  $m_q$  и элементарных масс  $dm_q = \delta dV, \sigma dS, \lambda dl$  (см. рис. 2.6).

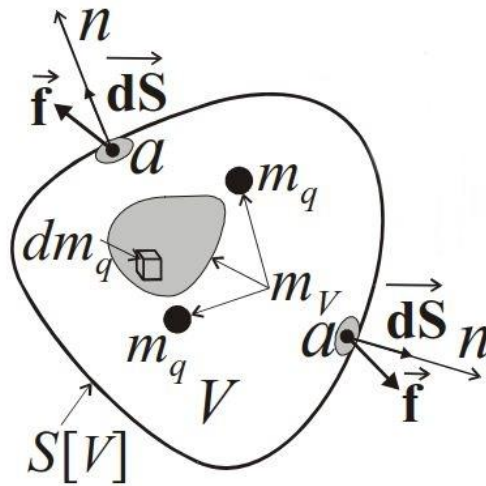


Рис. 2.6

Тогда получим одно из уравнений поля  $\vec{f}$  в интегральной форме, которое называют закон Гаусса:

$$\Psi_f = \oint_{S[V]} (\vec{f} \cdot \overrightarrow{dS}) = 4\pi \cdot m_V = 4\pi \cdot \int_V \delta dV.$$

Поток  $\Psi_f$  поля  $\vec{f}$  через замкнутую поверхность  $S[V]$  пропорционален сумме масс, находящихся внутри области  $V$ .

## Задачи (закон Кулона)

1) Две массы  $m$  расположены на расстоянии  $2a$ . Найти статическое поле в точке  $A$ , расположенной на расстоянии  $h$  от середины отрезка соединяющего массы (см. рис. 2.7).

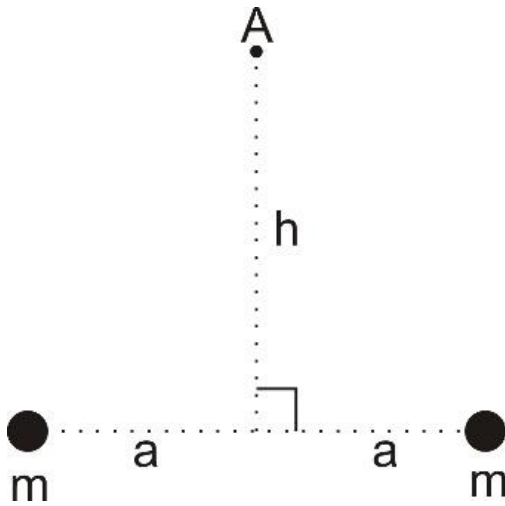


Рис. 2.7

*Решение:*

Для решения задачи удобнее всего использовать формулу, которая определяет поле как сумму полей от всех масс [3, с. 22].

Поле от двух точечных масс равняется:  $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \frac{m}{L_1^3} \vec{L}_1 + \frac{m}{L_2^3} \vec{L}_2$ , где  $\vec{L}_1$  – вектор от первой массы до точки наблюдения,  $\vec{L}_2$  – вектор от второй массы до точки наблюдения (см. рис. 2.8).

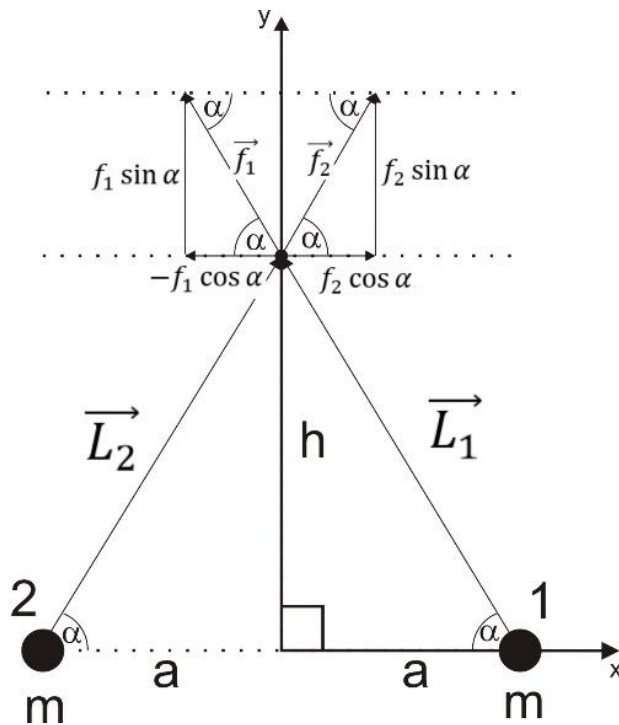


Рис. 2.8

Векторы  $\vec{L}_1$  и  $\vec{L}_2$  равны по величине  $\sqrt{a^2 + h^2}$  (вычисляется с помощью теоремы Пифагора), но отличаются по направлению, отсюда следует, что и величины полей  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$  равны. Для того чтобы найти суммарный вектор поля, найдем компоненты полей  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$  на оси X и Y, сложим соответствующие компоненты друг с другом и потом найдем суммарный вектор, зная его компоненты вдоль координатных осей.

Компоненты на ось X для полей  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$  равны соответственно,  $-f_1 \cos \alpha$  и  $f_2 \cos \alpha$ . После суммирования этих компонент мы получим 0, поскольку величины полей  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$  равны, косинусы углов равны и компоненты отличаются только знаком.

Компоненты на ось Y для полей  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$  равны соответственно,  $f_1 \sin \alpha$  и  $f_2 \sin \alpha$ . После суммирования этих компонент мы получим  $2f_1 \sin \alpha$ , поскольку величины полей  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$  равны, синусы углов равны и компоненты не отличаются знаком.

Таким образом получаем что вектор суммарного поля будет направлен вдоль оси Y и равен то, по величине  $2f_1 \sin \alpha$ . Подставим известные нам величины в конечное выражение поля, не забывая, что уже работаем только с величиной вектора:

$$2f_1 \sin \alpha = 2 \frac{m}{(a^2+h^2)^{3/2}} \sqrt{a^2 + h^2} \sin \alpha = 2 \frac{m}{(a^2+h^2)} \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} = 2 \frac{mh}{(a^2+h^2)^{3/2}}.$$

*Ответ:* поле в точке A равно  $2 \frac{mh}{(a^2+h^2)^{3/2}}$  и направлено вдоль оси Y.

2) Две массы  $m$  и  $-m$  расположены на расстоянии  $2a$ . Найти статическое поле в точке A, расположенной на расстоянии  $h$  от середины отрезка соединяющего массы (см. рис. 2.9).

Решение:

Для решения задачи удобнее всего использовать формулу, которая определяет поле как сумму полей от всех масс [3, с. 22].

Поле от двух точечных масс равняется:  $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = -\frac{m}{L_1^3} \vec{L}_1 + \frac{m}{L_2^3} \vec{L}_2$ , где

$\vec{L}_1$  – вектор от первой массы до точки наблюдения,  $\vec{L}_2$  – вектор от второй массы до точки наблюдения (см. рис. 2.10).

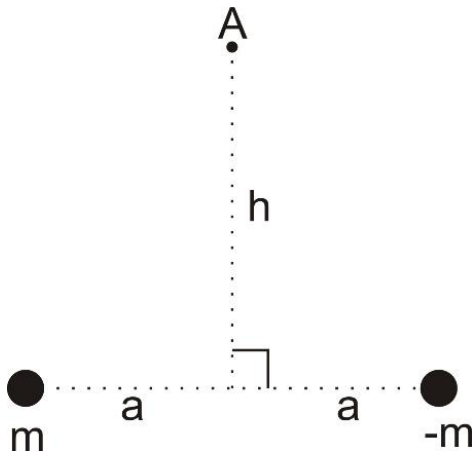


Рис. 2.9

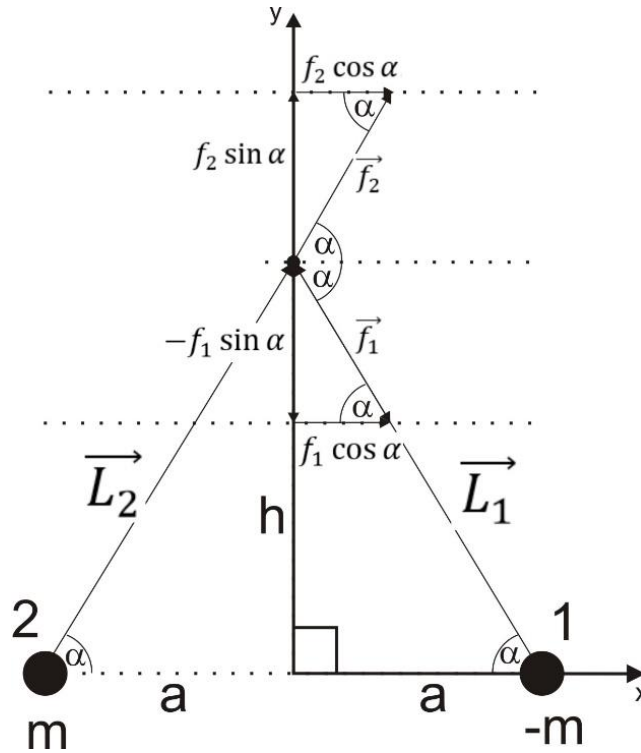


Рис. 2.10

Векторы  $\vec{L}_1$  и  $\vec{L}_2$  равны по величине  $\sqrt{a^2 + h^2}$  (вычисляется с помощью теоремы Пифагора), но отличаются по направлению, отсюда следует, что и величины полей  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$  равны, но отличаются по направлению. Для того чтобы найти суммарный вектор поля, найдем

компоненты полей  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$  на оси X и Y, сложим соответствующие компоненты друг с другом и потом найдем суммарный вектор, зная его компоненты вдоль координатных осей. Обратим внимание, что в отличие от предыдущей задачи поле  $\vec{f}_1$  будет направлено в противоположную сторону, поскольку масса  $m_1$  имеет отрицательный знак.

Компоненты на ось X для полей  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$  равны соответственно,  $f_1 \cos \alpha$  и  $f_2 \cos \alpha$ . После суммирования этих компонент мы получим  $2f_1 \cos \alpha$ , поскольку величины полей  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$  равны, косинусы углов равны и компоненты не отличаются знаком.

Компоненты на ось Y для полей  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$  равны соответственно,  $-f_1 \sin \alpha$  и  $f_2 \sin \alpha$ . После суммирования этих компонент мы получим 0, поскольку величины полей  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$  равны, синусы углов равны и компоненты отличаются только знаком.

Таким образом получаем, что вектор суммарного поля будет направлен вдоль оси X и равен по величине  $2f_1 \cos \alpha$ . Подставим известные нам величины в конечное выражение поля, не забывая, что уже работаем только с величиной вектора:

$$2f_1 \cos \alpha = 2 \frac{m}{(a^2+h^2)^{3/2}} \sqrt{a^2+h^2} \cos \alpha = 2 \frac{m}{(a^2+h^2)} \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} = 2 \frac{ma}{(a^2+h^2)^{3/2}}.$$

*Ответ:* поле в точке A равно  $2 \frac{ma}{(a^2+h^2)^{3/2}}$  и направлено вдоль оси X.

3) Четыре массы  $m$  расположены в углах квадрата со стороной  $a$ . Найти статическое поле в центре квадрата (точка A) (см. рис. 2.11).

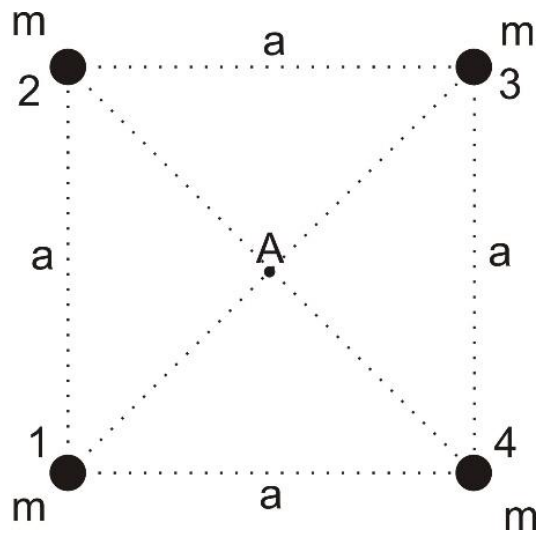


Рис. 2.11

Решение:

Для решения задачи удобнее всего использовать формулу, которая определяет поле как сумму полей от всех масс [3, с. 22]. Поле от четырех точечных масс равняется:  $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \vec{f}_4 = \frac{m}{L_1^3} \vec{L}_1 + \frac{m}{L_2^3} \vec{L}_2 + \frac{m}{L_3^3} \vec{L}_3 + \frac{m}{L_4^3} \vec{L}_4$ , где  $\vec{L}_1$  – вектор от первой массы до точки наблюдения,  $\vec{L}_2$  – вектор от второй массы до точки наблюдения,  $\vec{L}_3$  – вектор от третьей массы до точки наблюдения,  $\vec{L}_4$  – вектор от четвертой массы до точки наблюдения (см. рис. 2.12).

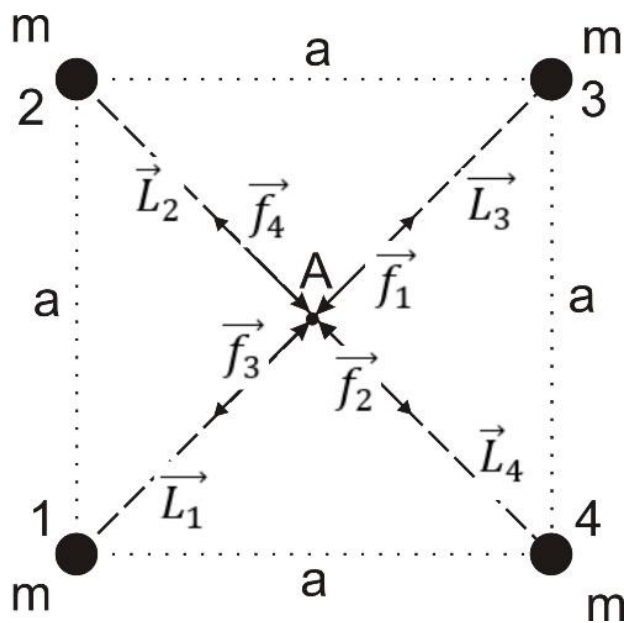


Рис. 2.12

Все вектора  $\vec{L}_i$  равны по величине, но отличны по направлению, поэтому и соответствующие поля от каждой точечной массы равны по величине, но отличаются по направлению.

Рассмотрим суммарные поля от каждой пары противоположных относительно центра точечных масс (массы 1 и 3, массы 2 и 4) по отдельности. Учитывая, что величины  $\vec{L}_1$  и  $\vec{L}_3$  равны, а направления противоположны, тогда мы можем записать, что  $L_1^3 = L_3^3$ ,  $\vec{L}_1 = -\vec{L}_3$ . Тогда суммарное поле от массы 1 и 3 равно:  $\vec{f}_1 + \vec{f}_3 = \frac{m}{L_1^3} \vec{L}_1 + \frac{m}{L_3^3} \vec{L}_3 = \frac{m}{L_1^3} \vec{L}_1 - \frac{m}{L_1^3} \vec{L}_1 = 0$ . То есть суммарное поле от масс 1 и 3 равно 0.

Проделав точно такие же рассуждения для масс 2 и 4 получим, что суммарное поле от них также равно 0. Отсюда следует, что суммарное поле от всех точечных масс в точке А равно 0.

Эту же задачу можно решить, используя уже решенную ранее задачу 1 в этом разделе, где было получено поле от двух точечных одинаковых масс на некотором расстоянии от отрезка соединяющего массы, оно равнялось  $2 \frac{mh}{a^2+h^2}$  и было направлено вдоль вертикальной оси.

Решая эту задачу также необходимо разделить решение на две части, где находятся поля от суммы двух противоположных масс попарно 1,3 и 2,4. Можно увидеть, что поле в центре квадрата от масс 1 и 3 равно полю от двух точечных масс из задачи 1, но нужно вместо h подставить 0 (поскольку мы ищем поле на расстоянии 0 от отрезка соединяющего массы), а вместо a подставить  $\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$  (поскольку расстояние между массами равно  $a \cdot \sqrt{2}$ ). Тогда, получим

$$2 \frac{mh}{(a^2+h^2)^{3/2}} \rightarrow 2 \frac{m \cdot 0}{((\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2})^2 + 0^2)^{3/2}} = 0.$$

Проделав такие же рассуждения для второй пары масс получим, что суммарное поле от них тоже равно 0 и соответственно общее суммарное поле от всех 4-х масс равно 0, что мы уже показали выше.

*Ответ:* статическое поле в точке А равно 0.



4) Четыре массы расположены в углах квадрата со стороной  $a$ . Две массы величиной  $m$  расположены в двух соседних углах, а две другие величиной  $-m$  в противоположных. Найти статическое поле в центре квадрата (см. рис. 2.13).

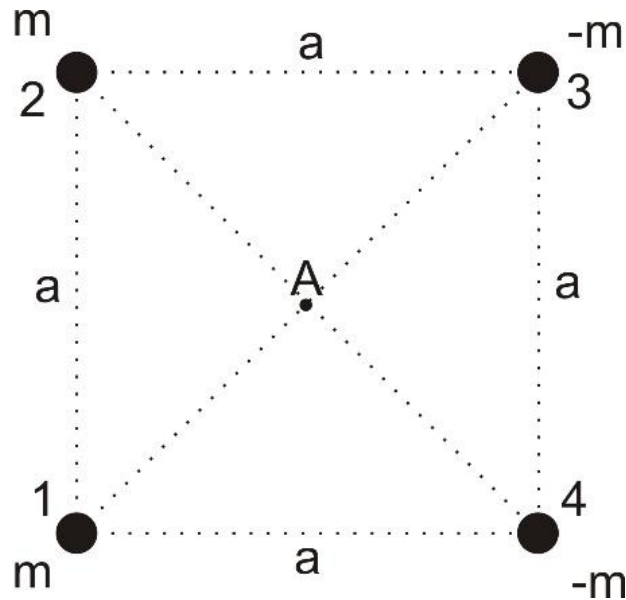


Рис. 2.13

*Решение:*

Для решения задачи удобнее всего использовать формулу, которая определяет поле как сумму полей от всех масс [3, с. 22]. Поле от четырех точечных масс равняется:  $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \vec{f}_4 = \frac{m}{L_1^3} \vec{L}_1 + \frac{m}{L_2^3} \vec{L}_2 + \frac{m}{L_3^3} \vec{L}_3 + \frac{m}{L_4^3} \vec{L}_4$ , где  $\vec{L}_1$  – вектор от первой массы до точки наблюдения,  $\vec{L}_2$  – вектор от второй массы до точки наблюдения,  $\vec{L}_3$  – вектор от третьей массы до точки наблюдения,  $\vec{L}_4$  – вектор от четвертой массы до точки наблюдения (см. рис. 2.14).

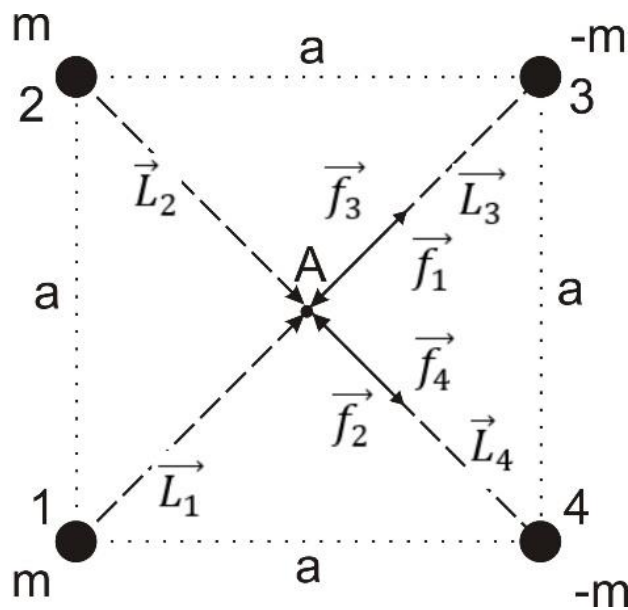


Рис. 2.14

Все вектора  $\vec{L}_i$  равны по величине, но отличны по направлению, поэтому и соответствующие поля от каждой точечной массы равны по величине, но отличаются по направлению.

Рассмотрим суммарные поля от каждой пары противоположных относительно центра точечных масс (массы 1 и 3, массы 2 и 4) по отдельности. Учитывая, что массы имеют разный знак, величины  $\vec{L}_1$  и  $\vec{L}_3$  равны, а направления противоположны, тогда мы можем записать, что  $L_1^3 = L_3^3$ ,  $\vec{L}_1 = -\vec{L}_3$ . Тогда суммарное поле от массы 1 и 3 равно:  $\vec{f}_1 + \vec{f}_3 = \frac{m}{L_1^3} \vec{L}_1 + \frac{-m}{L_3^3} \vec{L}_3 = \frac{m}{L_1^3} \vec{L}_1 + \frac{m}{L_1^3} \vec{L}_1 = \frac{2m}{L_1^3} \vec{L}_1$ . То есть суммарное поле от масс 1 и 3 равно  $f_{13} = \frac{2m}{L_1^2}$  и направлено от центра квадрата к массе 3.

Применив такие же рассуждения к другой паре точечных масс 2 и 4, получим, что суммарное поле от масс 2 и 4 равно  $f_{24} = \frac{2m}{L_1^2}$  и направлено от центра квадрата к массе 4.

Теперь осталось просуммировать два поля от каждой пары точечных масс  $\vec{f}_{13}$  и  $\vec{f}_{24}$  (см. рис. 2.15). Для того чтобы найти суммарный вектор поля, найдем компоненты полей  $\vec{f}_{13}$  и  $\vec{f}_{24}$  на оси X и Y, сложим соответствующие компоненты друг с другом и потом найдем суммарный вектор, зная его компоненты вдоль координатных осей.

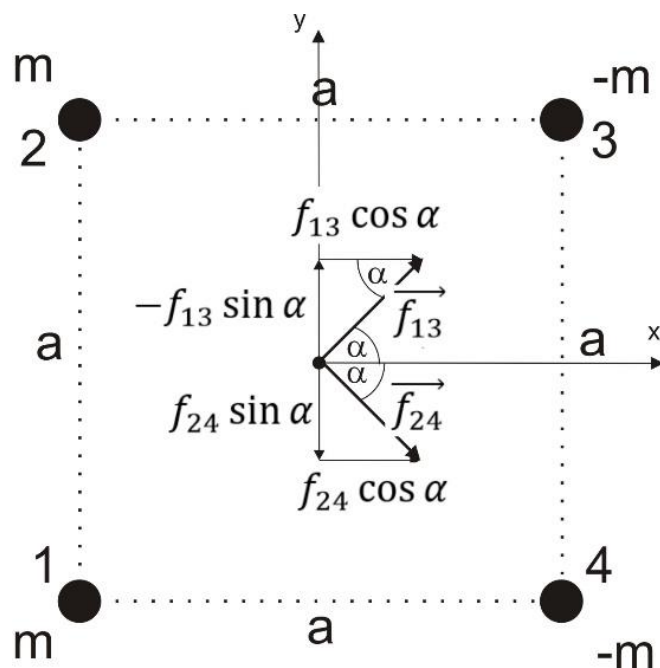


Рис. 2.15

Компоненты на ось  $X$  для полей  $\vec{f}_{13}$  и  $\vec{f}_{24}$  равны соответственно,  $f_{13} \cos \alpha$  и  $f_{24} \cos \alpha$ . Помня, что величины  $\vec{f}_{13}$  и  $\vec{f}_{24}$  равны, поэтому получим после суммирования компонент вдоль оси  $X$  следующее  $2f_{13} \cos \alpha$ .

Компоненты на ось  $Y$  для полей  $\vec{f}_{13}$  и  $\vec{f}_{24}$  равны соответственно,  $-f_{13} \sin \alpha$  и  $f_{24} \sin \alpha$ . После суммирования этих компонент мы получим 0, поскольку величины полей  $\vec{f}_{13}$  и  $\vec{f}_{24}$  равны, синусы углов равны и компоненты отличаются только знаком. Поскольку угол  $\alpha$  равен в квадрате  $45^\circ$ , то его синус и косинус равны  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Таким образом получаем, что вектор суммарного поля от четырех точечных масс будет направлен вдоль оси  $X$  и равен по величине  $2f_{13} \cos \alpha$ . Подставим известные нам величины в конечное выражение поля, не забывая, что уже работаем только с величиной вектора:

$$2f_{13} \cos \alpha = \frac{2m}{L_1^2} \cos \alpha = \frac{2m}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot m}{a^2}.$$

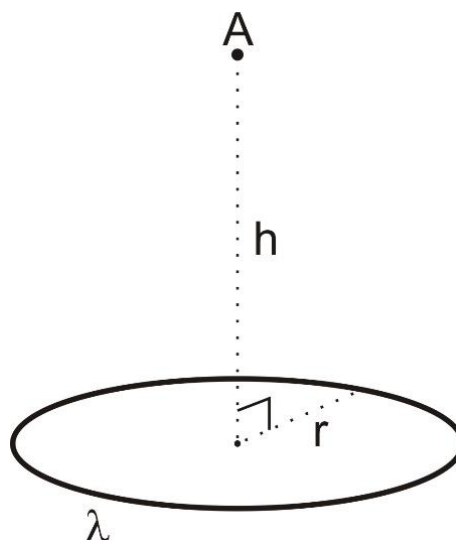
Ответ: поле в точке  $A$  равно  $\frac{2\sqrt{2} \cdot m}{a^2}$ , и направлено вдоль оси  $X$ .

5) Есть бесконечно тонкое кольцо радиуса  $r$  и линейной плотностью массы  $\lambda$ . Найти статическое поле в точке  $A$ , расположенной на расстоянии  $h$  от центра кольца (см. рис. 2.16).

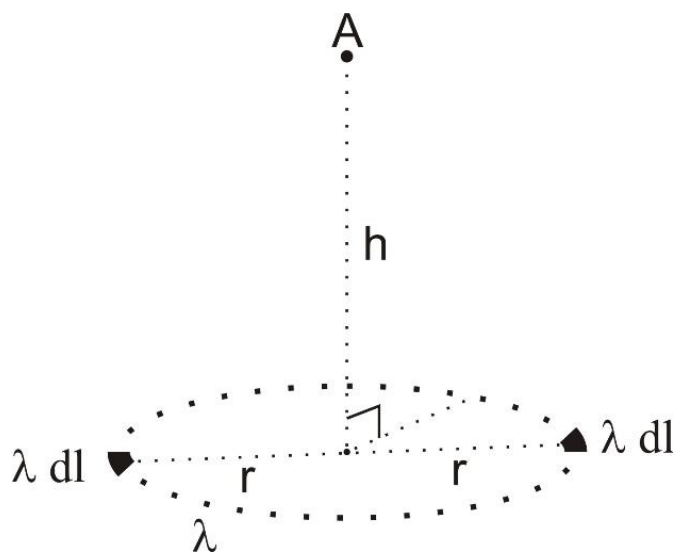
*Решение:*

Задачу можно решить, используя уже решенную ранее задачу 1 в этом разделе, где было получено поле от двух точечных одинаковых масс на некотором расстоянии от отрезка соединяющего массы, оно равнялось  $2 \frac{mh}{a^2+h^2}$  и было направлено вдоль вертикальной оси.

Если разбить кольцо на множество бесконечно малых кусочков длиной  $dl$  и соответственно массой  $\lambda \cdot dl$  (см. рис. 2.17), и взяв два таких кусочка расположенные на одном диаметре кольца, то можно увидеть что поле от этих двух противоположных кусочков можно найти, используя задачу 1 из этого раздела, где  $h$  остается тем же  $h$ , что и в задаче 1, вместо  $a$  нужно подставить  $r$  (поскольку расстояние между массами равно  $2r$ ), а массу  $m$  нужно заменить на маленькую массу  $\lambda \cdot dl$ . Тогда, получим  $2 \frac{mh}{(a^2+h^2)^{3/2}} \rightarrow 2 \frac{\lambda \cdot dl \cdot h}{(r^2+h^2)^{3/2}}$ . Поле от этих двух маленьких масс направлено вверх.



*Рис. 2.16*



*Рис. 2.17*

Для того чтобы найти поле от всего кольца необходимо проинтегрировать поле от двух маленьких масс по всей длине кольца, которое разбито на маленькие массы. Поскольку направление для любой пары маленьких масс направлено вверх для вычисления суммарного поля нужно просто просуммировать величины полей от всех масс, а направление у суммарного поля будет также вверх. Длина окружности, как известно,  $2\pi r$ , но поскольку из задачи 1 известно поле от двух противоположных масс, то для того, чтобы узнать поле от всего кольца необходимо взять интеграл по длине от половины кольца.

Возьмем этот интеграл:

$$\int_0^{\pi r} 2 \frac{\lambda \cdot dl \cdot h}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = 2 \frac{\lambda \cdot h}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \int_0^{\pi r} dl = 2 \frac{\lambda \cdot h}{(r^2 + h^2)^{3/2}} (\pi r - 0) \\ = 2 \frac{\lambda \cdot h \cdot \pi r}{(r^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Можно заметить, что величина  $2\lambda \cdot \pi r$  равна массе всего кольца, тогда ответ можно переписать в виде  $\frac{m \cdot h}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$ , где  $m$  – масса всего кольца.

*Ответ:* поле в точке А равно  $2 \frac{\lambda \cdot h \cdot \pi r}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$  или  $\frac{m \cdot h}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$  (если нам известна масса кольца) и направлено вверх.

б) Две массы  $m$  и  $-m$  расположены на расстоянии  $2a$ . Найти статическое поле в точке А, расположенной на расстоянии  $h$  от середины отрезка соединяющего массы. Известно, что  $h \gg 2a$  (см. рис. 2.18).

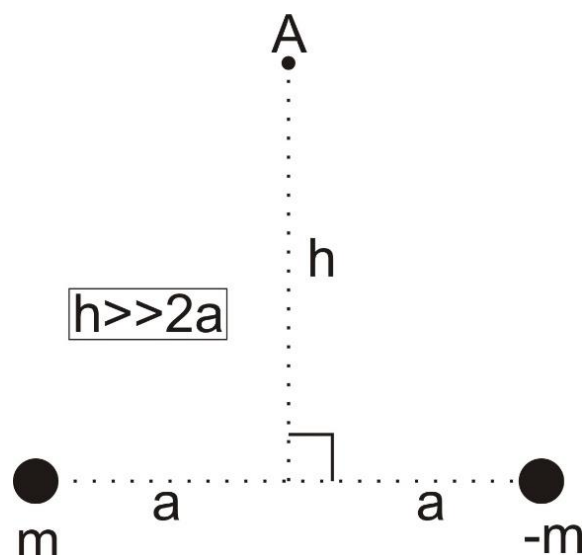


Рис. 2.18

*Решение:*

Задача по сути аналогична задаче 2 из данного раздела, отличие состоит лишь в том, что расстояние  $h \gg 2a$ , то есть нам надо найти поле диполя.

Итак, полное решение задачи 2 дает следующее точное выражение для поля в нашем случае:  $f = 2 \frac{ma}{(a^2+h^2)^{3/2}}$ . Вспомнив, что  $h \gg 2a$  упростим выражение:  $f = 2 \frac{ma}{(a^2+h^2)^{3/2}} \approx 2 \frac{ma}{(h^2)^{3/2}} = 2 \frac{ma}{h^3}$ . Направлено наше поле вдоль направления от массы  $m$  к массе  $-m$ .

*Ответ:* поле равно  $2 \frac{ma}{h^3}$  и направлено вдоль направления от массы  $m$  к массе  $-m$ .

## Задачи (закон Гаусса)

В этом разделе будут показаны решения задач по нахождению поля, используя уравнение статического поля [3, с. 28], которое получено из формулы Гаусса-Остроградского. Согласно этой формуле поток  $\Psi_f$  поля  $\vec{f}$  через замкнутую поверхность  $S[V]$  пропорционален сумме масс находящихся в области  $V$ :

$$\Psi_f = \oint_{S[V]} (\vec{f} \cdot d\vec{S}) = 4\pi \cdot m_V = 4\pi \int_V \delta \cdot dV.$$

Из выражения для потока видно, что для удобства вычисления интегралов необходимо правильно выбрать поверхность, на которой будет считаться поток, и внутри которой будет считаться общая масса. Чаще всего такими поверхностями удобно выбрать те, на которых поле не меняется, то есть в любой точке поверхности поле одинаково или хотя бы одинаково скалярное произведение поля и нормали к поверхности. Часто случается, что нет замкнутой поверхности, на которой поле не меняется, но бывает, что можно разбить всю замкнутую поверхность на несколько частей, на каждой из которых поле уже считается просто.

Выбор удобной поверхности всегда связан с симметрией задачи. Если в задаче есть какая-либо симметрия, то значит есть симметричные точки, в которых поле одинаково и именно по этим симметричным точкам удобно выбрать поверхность для расчета потока поля. Например: 1) если у вас сферическая симметрия, тогда удобно выбрать сферу с центром в центре симметрии, тогда на ее поверхности поле будет одинаково; 2) если у вас цилиндрическая симметрия, тогда удобно выбрать в качестве поверхности цилиндр, ось которого совпадает с осью симметрии, тогда на боковой поверхности поле будет одинаково, а на торцах цилиндра придется уже считать отдельно поле; 3) еще есть симметрия относительно какой-либо плоскости, в таком случае удобно выбрать в качестве поверхности параллелепипед, в котором поверхность симметрии проходит через середину параллелепипеда, в этом случае на боковых гранях надо будет отдельно считать поле, а на верхней или нижней поле будет одинаково.

Необходимо помнить, что решая задачи, использующие симметрию, нужно понимать, как именно доказывать, что симметрия дает вам в этом случае удобство, и что в каждой точке выбранной поверхности поле у вас будет одинаково. В задачах данного раздела будут показаны такие рассуждения и доказательства.

Существуют задачи, в которых имеется несколько объектов, которые создают поле. Учитывая свойство суперпозиции статических полей можно посчитать поля от каждого объекта отдельно, учитывая симметрию и удобный расчет поля для каждого, а потом просто сложить поля от всех объектов для получения конечного ответа.

7) Найти статическое поле везде от точечной массы  $m$  (см. рис. 2.19).

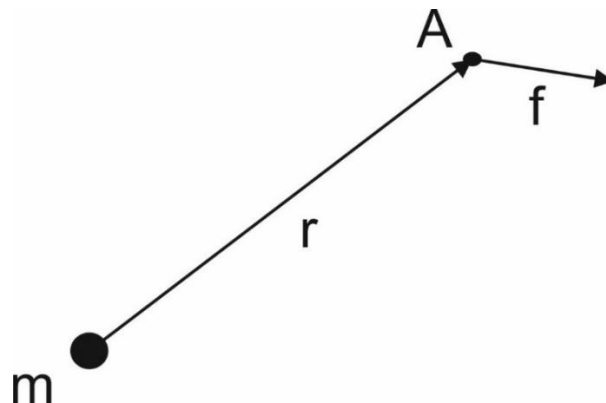


Рис. 2.19

*Решение:*

Для нахождения поля через поток, нужно выбрать поверхность, через которую будет считаться поток, и внутри которой будет учитываться масса. Поскольку в данном случае мы имеем сферическую симметрию, то лучшая поверхность для этого это сфера с центром в точке расположения массы. Такая поверхность полностью учитывает симметрию задачи. Соответственно меняя радиус сферы от 0 до бесконечности сможем найти поле во всем пространстве.

Итак, найдем поле на поверхности сферы радиусом  $r$ . Для начала нам нужно показать, что поле в любой точке такой сферы одинаково по



величине и имеет направление нормальное к поверхности сферы. Докажем это утверждение от противного. Для доказательства нам как раз поможет симметрия задачи.

Допустим на сфере есть две точки А и В, и в этих точках поле отличается. Тогда проведем следующие рассуждения: наблюдатель смотрит на нашу систему и видит, что в точке А поле равно величине  $\vec{f}_A$  (см. рис. 2.20, 1). Теперь представьте, что наблюдатель закрыл глаза и его переместили так, что точка В для него теперь совпала с точкой А (см. рис. 2.20, 2) и открыв глаза он увидит, что поле в точке изменилось с  $\vec{f}_A$  на  $\vec{f}_B$ , но никаких других изменений кроме этого нет (см. рис. 2.20, 3). Точечная масса, как была в центре сферы, так и осталась, никаких новых объектов не появилось, пространство как было изотропным, так и осталось. То есть для наблюдателя ничего не изменилось, кроме величины поля, что невозможно. Таким образом получается противоречие: поле не должно меняться, но оно поменялось.

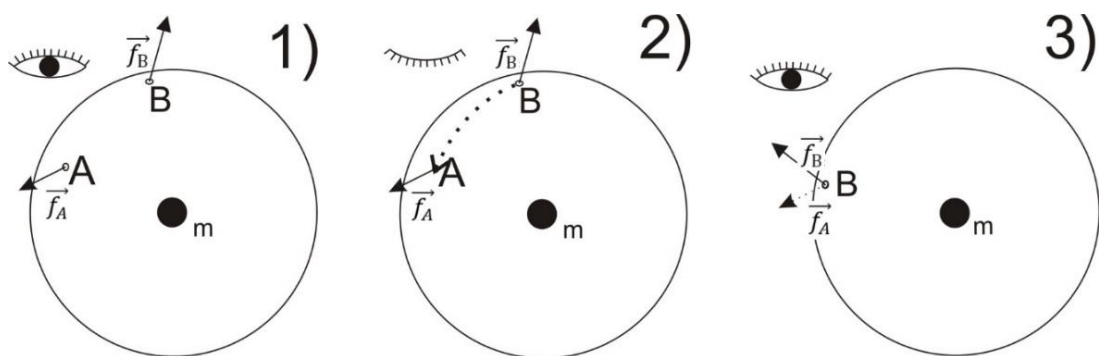


Рис. 2.20

Отсюда следует вывод, что поля  $\vec{f}_A$  на  $\vec{f}_B$  равны, а это возможно только в том случае, если в любой точке на сфере величины полей будут равны и направлены перпендикулярно поверхности сфере, то есть по нормали к ней.

Найдем это поле посчитав поток:  $\Psi_f = \oint_{S[V]} (\vec{f} \cdot d\vec{S}) = \{f\} \|\vec{dS}\} = \oint_{S[V]} f \cdot dS = f \oint_{S[V]} dS = f \cdot 4\pi r^2$ . При преобразованиях было учтено, что

поле параллельно нормали к поверхности и поэтому можно убрать скалярное произведение, в котором косинус угла между параллельными векторами равен 1. Также вынесли величину поля из-под знака интеграла, поскольку оно не зависит от точки сферы и везде на сфере одинаково. Сам интеграл равен площади сферы  $4\pi r^2$ .

Другая часть равенства из формулы для потока равняется массе заключенной внутри сферы умноженной на  $4\pi$ . Таким образом получаем:  $f \cdot 4\pi r^2 = 4\pi m \Rightarrow f = \frac{m}{r^2}$ . Направление поля по нормали к поверхности сферы, то есть вдоль радиуса от точечной массы к точке где ищем поле.

Необходимо отметить, что мы нашли поле везде, кроме точки, где находится сама масса. В этой точке поле не определено, поскольку в этой точке не работает формула Гаусса-Остроградского из-за неограниченности и не дифференцируемости поля [3, с. 17].

Если внимательно посмотреть, то видно, что ответ совпадает с формулой 2.4 [3, с. 22], где в качестве источника поля будет выступать одна точечная масса.

Полезно посмотреть и проанализировать график поля в зависимости от расстояния от центра рассматриваемой системы (см. рис. 2.21).

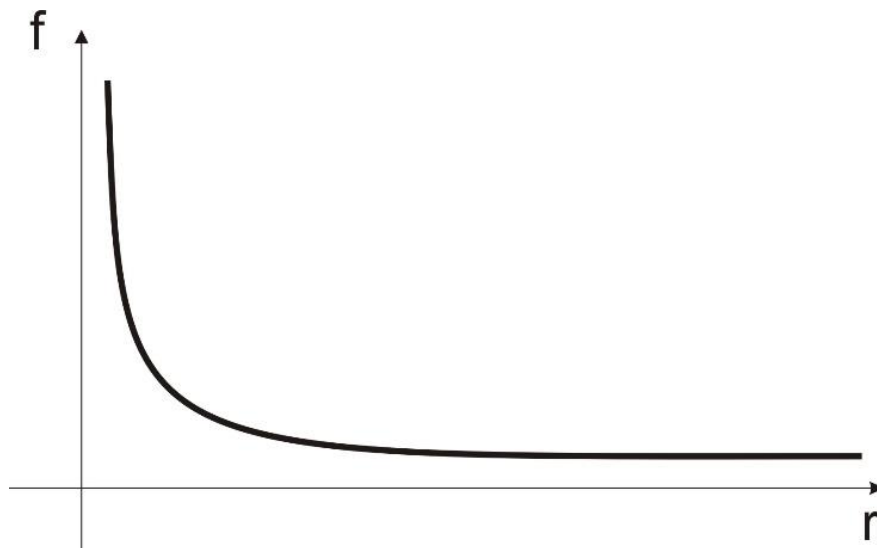


Рис. 2.21

Как видно из рисунка, поле описывается гиперболой степени 2. Величина поля при удалении от источника поля уменьшается и стремится к нулю. При приближении к точечной массе величина поля наоборот увеличивается и становится очень большой при близком приближении к точечной массе, в пределе бесконечной. Из графика также видно, что поле определено везде кроме точки  $r = 0$ , о чем было написано выше.

*Ответ:* величина поля равна  $\frac{m}{r^2}$  и направлено оно вдоль направления от массы  $m$  к точке наблюдения.

8) Найти статическое поле везде от бесконечно тонкой сферы массой  $m$  и радиусом  $R$  (см. рис. 2.22).

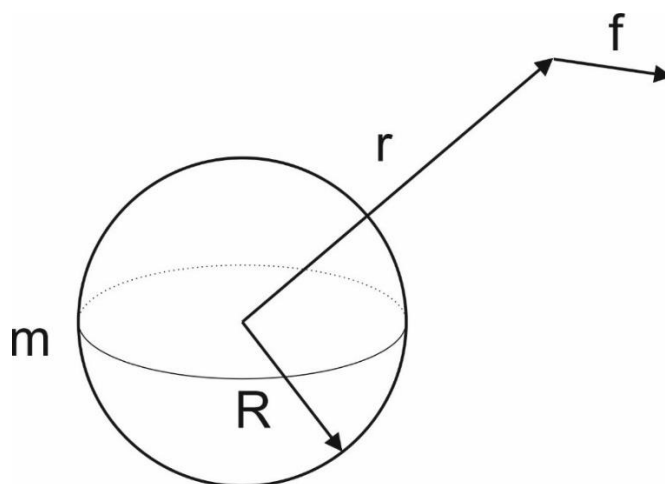


Рис. 2.22

*Решение:*

Для нахождения поля от бесконечно тонкой сферы необходимо разделить решение задачи на 2 части по числу областей, где мы будем искать поле.

Для начала будем искать поле в области где  $r > R$ , то есть мы находимся не внутри сферы, а снаружи ее. Как и в задаче № 7 этого раздела, у нас есть сферическая симметрия и после проведения таких же рассуждений можно выписать формулу для потока поля:

$$f \cdot 4\pi r^2 = 4\pi m \Rightarrow f = \frac{m}{r^2}.$$

Направление поля по нормали к поверхности сферы, то есть вдоль радиуса от центра системы к точке, где ищем поле.

Вторая область, где нам необходимо найти поле, это внутри сферы с массой  $m$  ( $r < R$ ). Найдем поле, используя то же самое выражение для потока поля.

В этом случае также имеется сферическая симметрия в задаче, то есть можно выбрать в качестве поверхности, через которую будем считать поток, сферу с радиусом меньшим чем  $R$  и центром, совпадающим с центром системы. Используя такие же рассуждения, как и в задаче 7 можно прийти к выводу, что поле на поверхности такой сферы направлено вдоль радиуса и равно по величине, отсюда выпишем выражение для потока поля:

$$f \cdot 4\pi r^2 = 4\pi m .$$

Можно вспомнить, что в этом выражении справа стоит масса, которая заключена внутри сферы, на поверхности которой мы ищем поле. По условию задачи вся масса сосредоточена в сфере радиусом  $R$  и других масс нет. Тогда понятно, что внутри нашей поверхности, которая имеет радиус меньше чем  $R$ , нет массы, то есть правая часть выражения будет равна 0.

$$f \cdot 4\pi r^2 = 4\pi m = 0 \Rightarrow f = 0.$$

То есть внутри сферы обладающей массой поле равно 0.

Необходимо отметить, что мы нашли поле везде кроме сферы, где находится масса ( $r = R$ ). На этой сфере поле не определено, поскольку на ней не работает формула Гаусса-Остроградского из-за неограниченности и не дифференцируемости поля [3, с. 17].

Полезно посмотреть и проанализировать график поля в зависимости от расстояния от центра рассматриваемой системы (см. рис. 2.23).

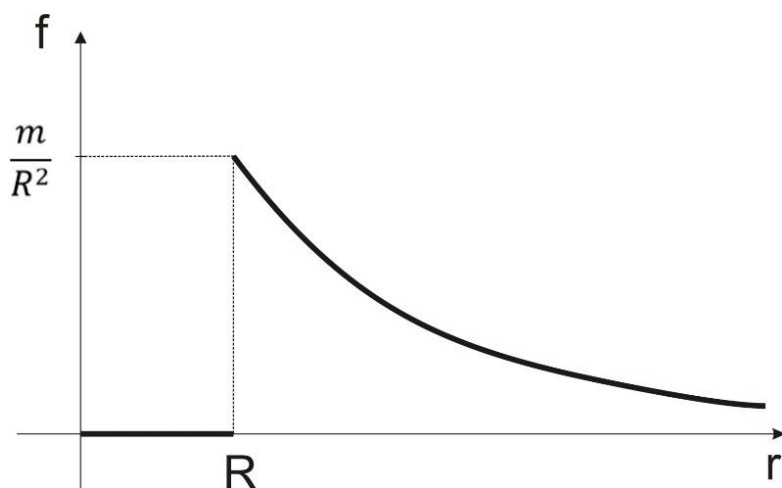


Рис. 2.23

Как видно из рисунка, график поля разделен на две части до  $R$  и после.

В области, где  $r > R$  поле описывается гиперболой степени 2. Величина поля при удалении от источника поля уменьшается и стремится к нулю. При приближении к  $R$  величина поля наоборот увеличивается и стремится к значению  $f = \frac{m}{R^2}$ .

При  $r < R$  график равен 0. Поскольку при  $r = R$  график имеет разрыв, то в этой точке функция поля не дифференцируема и поэтому, на сфере где  $r = R$ , поле не определено.

*Ответ:* если  $r > R$  то величина поля равна  $\frac{m}{r^2}$  и направлено вдоль направления от центра сферы к точке наблюдения; если  $r < R$  то величина поля равна 0.

9) Найти статическое поле везде от шара радиусом  $R$  с равномерно распределенной плотностью объемной массы равной  $\rho$  (см. рис. 2.24).

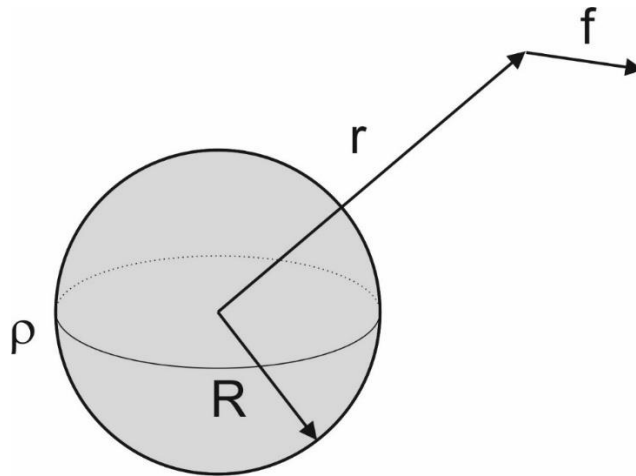


Рис. 2.24

*Решение:*

Для нахождения поля от шара необходимо разделить решение задачи на 2 части по числу областей, где мы будем искать поле.

Для начала будем искать поле в области где  $r > R$ , то есть мы находимся не внутри шара, а снаружи его. Как и в задаче № 7 этого раздела, у нас есть сферическая симметрия и после проведения таких же рассуждений можно выписать формулу для потока поля:

$$f \cdot 4\pi r^2 = 4\pi m \Rightarrow f = \frac{m}{r^2}.$$

Массу шара можно легко найти, умножив его плотность  $\rho$  на объем, который равен  $\pi R^3 \cdot 4/3$ . В итоге получим, что масса равна:

$$m = \pi R^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \rho, \Rightarrow f = \frac{m}{r^2} = \pi \frac{R^3}{r^2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \rho.$$

Направление поля по нормали к поверхности сферы, то есть вдоль радиуса от центра системы к точке, где ищем поле.

Для нахождения поля внутри шара ( $r < R$ ) будем искать поток поля на сфере с радиусом  $r$ , которая располагается внутри шара. Используя рассуждения из задачи № 7 о сферической симметрии задачи, можно понять, что на поверхности такой сферы поле будет равно по модулю и направлено вдоль направления радиуса. Исходя из этого, можно выписать уравнение потока поля в следующем виде:

$$f \cdot 4\pi r^2 = 4\pi m \Rightarrow f = \frac{m}{r^2}.$$

Осталось найти массу, сосредоточенную внутри нашей сферы, на поверхности которой мы ищем поле. Масса данной сферы будет равна:

$$m = \pi r^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \rho, \Rightarrow f = \frac{m}{r^2} = \pi \frac{r^3}{r^2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \rho = \pi r \cdot \frac{4}{3} \cdot \rho.$$

Направление поля будет по нормали к поверхности сферы, то есть вдоль радиуса от центра системы к точке, где ищем поле.

В данной задаче, в отличие от двух предыдущих, искомое поле определено везде, что можно увидеть, проанализировав график поля на различных радиусах (см. рис. 2.25).

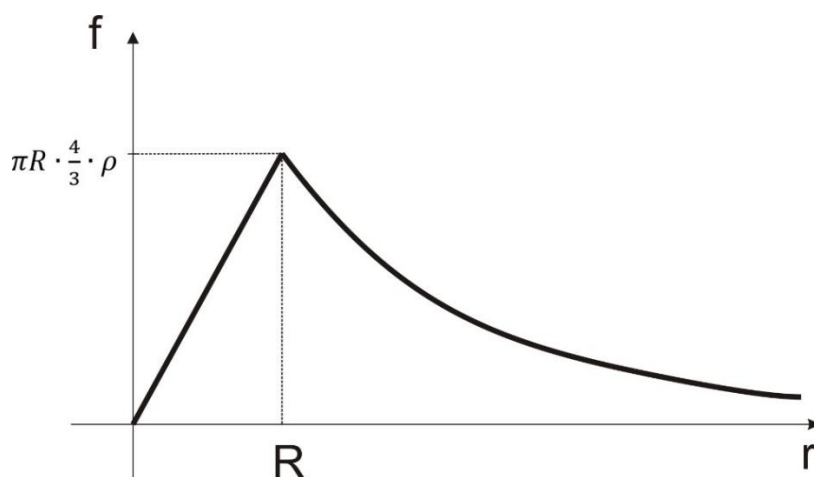


Рис. 2.25

Величина поля начинается с 0 и линейно возрастает вплоть до  $r = R$  и далее начинает спадать по гиперболе степени 2. На больших удалениях поле стремится к 0. Из графика видно, что величины поля непрерывны и принимают значения на всем промежутке возможных  $r$ , в отличие от двух предыдущих задач.

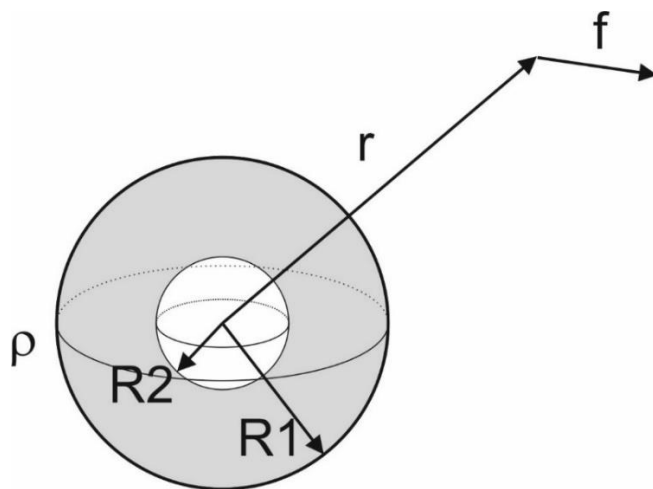
В чем же отличие данной задачи? Почему у нас в предыдущих находились точки, где поле не определено, а в задаче № 9 таких точек нет? Ответ заключается в том, что в предыдущих задачах были точки, которые имели бесконечную плотность вещества в точечном объекте (см. задача № 7) или в бесконечно тонком объекте (см. задача № 8). Именно в

таких местах поле невозможно определить из наших уравнений, поскольку невозможно посчитать пространственные производные от бесконечных величин.

В случае же равномерно распределенной массы, как в задаче № 9, таких проблем не возникает и поле можно определить везде.

*Ответ:* если  $r > R$  то величина поля равна  $\pi \frac{R^3}{r^2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \rho$  и направлено вдоль направления от центра сферы к точке наблюдения; если  $r < R$  то величина поля равна  $\pi r \cdot \frac{4}{3} \cdot \rho$  и направлено вдоль направления от центра сферы к точке наблюдения.

10) Найти статическое поле везде от шара радиусом  $R_1$  с равномерно распределенной плотностью объемной массы равной  $\rho$  и сферической полостью, расположенной в центре шара с радиусом  $R_2$  (см. рис. 2.26).



*Рис. 2.26*

*Решение:*

Для нахождения поля от полого шара необходимо разделить решение задачи на 3 части по числу областей, где мы будем искать поле. Это следующие области:  $r > R_1$ ,  $r < R_2$  и  $R_1 > r > R_2$ .

Как и в задаче № 7 мы имеем сферическую симметрию, поэтому выбор поверхностей, на которых мы будем считать поток поля очевиден,



это будут сферы различного радиуса. Если повторить все те рассуждения, которые были приведены в задаче № 7 можно понять, что в этой задаче также, как и в задаче 7, величина поля на сфере радиуса  $r$  (который может быть из всех 3-х областей) будет одинакова и направление поля будет вдоль направления по радиусу от центра системы к точке наблюдения.

При  $r > R1$  мы находимся не внутри шара, а снаружи его. Как и в задаче № 7 этого раздела у нас есть сферическая симметрия и после проведения таких же рассуждений можно выписать формулу для потока поля:

$$f \cdot 4\pi r^2 = 4\pi m \Rightarrow f = \frac{m}{r^2}.$$

Массу шара можно найти, умножив его плотность  $\rho$  на объем, который занимает масса. Объем этот равен разности объемов большой сферы с радиусом  $R1$  и полости в шаре радиусом  $R2$ . В виде формул это выражается следующим образом:

$$V = V1 - V2 = \pi R1^3 \cdot \frac{4}{3} - \pi R2^3 \cdot \frac{4}{3} = \pi \cdot \frac{4}{3} (R1^3 - R2^3),$$

отсюда следует, что поле в области  $r > R1$  будет следующее:

$$f \cdot 4\pi r^2 = 4\pi m \Rightarrow f = \frac{m}{r^2} = \frac{\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \rho (R1^3 - R2^3)}{r^2}.$$

При  $r < R2$  мы находимся внутри полости. Как и в задаче № 8, когда мы находились внутри полой сферы, поле находится следующим образом: внутри поверхности, на которой мы ищем значение поля и которая имеет радиус  $r$  меньше чем  $R2$ , нет массы, то есть правая часть выражения будет равна 0.

$$f \cdot 4\pi r^2 = 4\pi m = 0 \Rightarrow f = 0,$$

то есть внутри полости поле равно 0.

Осталось определить поле в области  $R1 > r > R2$ . Для этого запишем наше выражение для потока поля через сферическую поверхность в задаче со сферической симметрией:

$$f \cdot 4\pi r^2 = 4\pi m \Rightarrow f = \frac{m}{r^2}.$$

Опять же для определения величины необходимо посчитать массу, которая заключена внутри сферы ограниченной радиусом  $r$  ( $R_1 > r > R_2$ ). Чтобы посчитать эту массу надо плотность  $\rho$  умножить на объем, который занимает масса. Объем этот равен разности объемов сферы с радиусом  $r$  и полости в шаре радиусом  $R_2$ . В виде формул это выражается следующим образом:

$$V = V - V_2 = \pi r^3 \cdot \frac{4}{3} - \pi R_2^3 \cdot \frac{4}{3} = \pi \cdot \frac{4}{3} (r^3 - R_2^3),$$

отсюда следует, что поле в области  $R_1 > r > R_2$  будет следующее:

$$f \cdot 4\pi r^2 = 4\pi m \Rightarrow f = \frac{m}{r^2} = \frac{\pi \cdot \frac{4}{3} \rho (r^3 - R_2^3)}{r^2}.$$

Нарисуем график найденного поля во всем диапазоне радиусов (см. рис. 2.27).

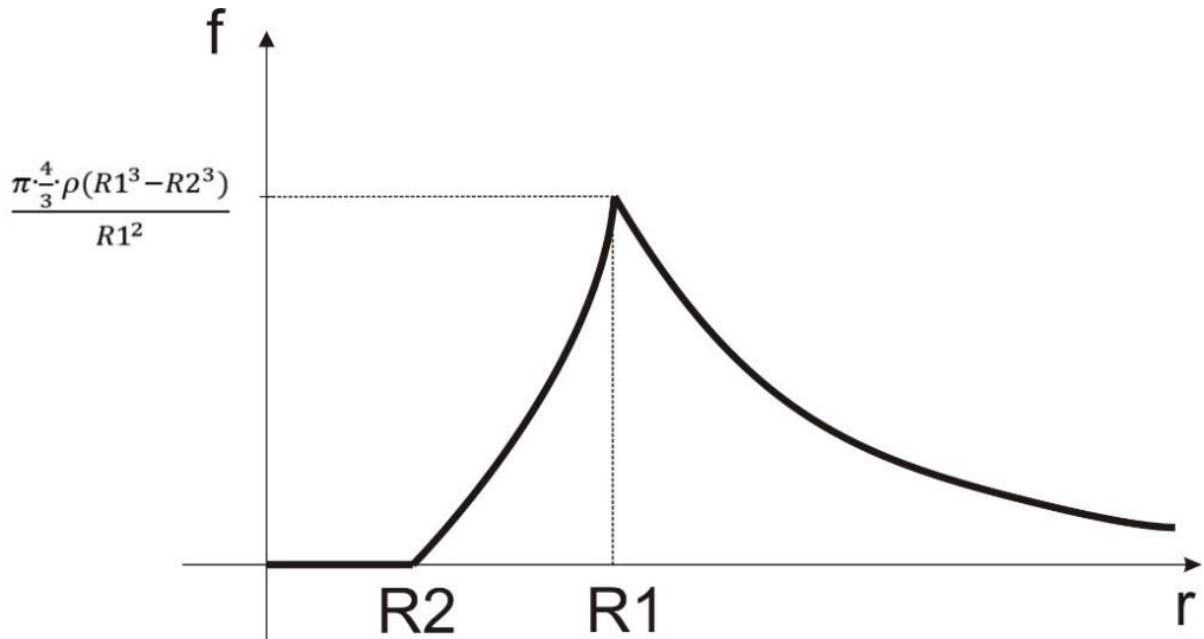


Рис. 2.27

По графику поля видно, что внутри полости у нас поле равно 0, что похоже на полюю сферу, внутри которой поле тоже было нулевое (см. задача № 7). Далее величина поля начинает расти от радиуса  $R_2$  до радиуса  $R_1$  (аналогия с задачей № 8 с шаром), но уже не линейно. После выхода радиуса за пределы полого шара мы получаем гиперболический спад со степенью 2, что схоже с полем от точечной массы, где на бесконечном удалении мы имеем поле, стремящееся к 0.

Ответ: если  $r < R_2$ , то величина поля равна 0; если  $R_1 > r > R_2$ , то величина поля равна  $\frac{\pi \cdot \frac{4}{3} \rho (r^3 - R_2^3)}{r^2}$  и направлено вдоль направления от центра сферы к точке наблюдения; если  $r > R_1$ , то величина поля равна  $\frac{\pi \cdot \frac{4}{3} \rho (R_1^3 - R_2^3)}{r^2}$  и направлено вдоль направления от центра сферы к точке наблюдения.

11) Найти статическое поле везде от бесконечно тонкой нити с линейной плотностью  $\lambda$ , которая вытянута вдоль одной прямой (см. рис. 2.28).

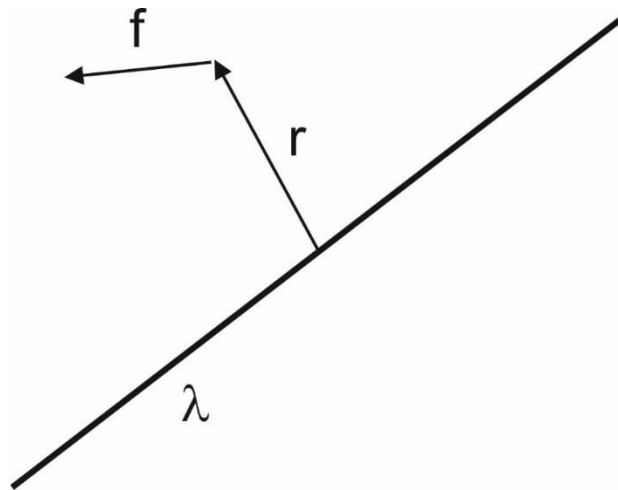
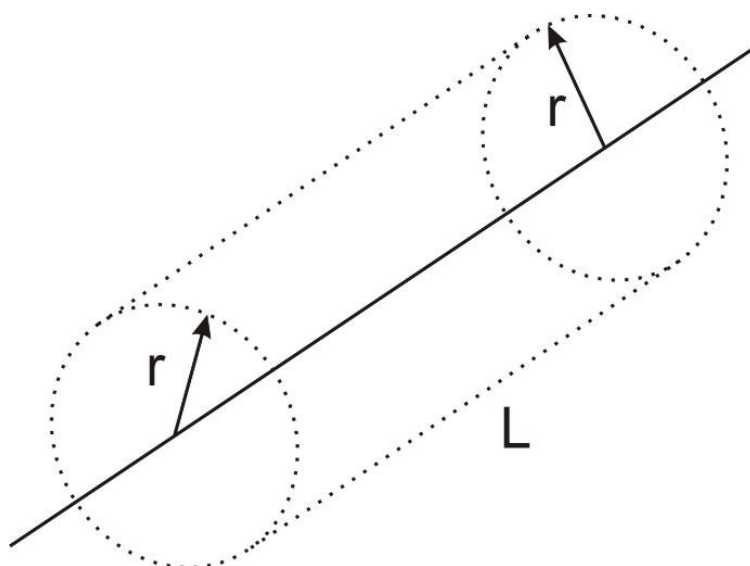


Рис. 2.28

*Решение:*

Как уже говорилось в этом разделе, для удобного решения задачи на нахождение поля через вычисление потока через некоторую поверхность, необходимо правильно выбрать поверхность, на которой будет удобно считать поток поля. В данной задаче есть цилиндрическая симметрия, то есть имеется одна выделенная ось (вдоль тонкой бесконечной нити), вокруг которой все направления одинаковы. Соответственно, при таком типе симметрии удобнее всего выбирать поверхность в виде цилиндра (см. рис. 2.29).



*Рис. 2.29*

Изменяя радиус и длину такого цилиндра, можно найти поле во всем пространстве. Для нахождения поля необходимо вначале доказать, что на поверхности цилиндра искомое статическое поле будет иметь одинаковую величину и направлено перпендикулярно оси симметрии. Докажем это аналогично тому как мы это делали в задачах со сферической симметрией (см. задача № 7).

Допустим на боковой поверхности цилиндра есть две точки А и В, и в этих точках поле отличается. Тогда проведем следующие рассуждения: наблюдатель смотрит на нашу систему и видит, что в точке А поле равно величине  $\vec{f}_A$  (см. рис. 2.30, 1). Теперь представьте, что наблюдатель закрыл глаза и его переместили так, что точка В для него теперь совпала с точкой А (см. рис. 2.30, 2) и открыв глаза он увидит, что поле в точке изменилось с  $\vec{f}_A$  на  $\vec{f}_B$ , но никаких других изменений кроме этого нет (см. рис. 2.30, 3). Линейная масса, как была по оси системы, так и осталась, никаких новых объектов не появилось, пространство как было изотропным, так и осталось. То есть для наблюдателя ничего не изменилось, кроме величины поля, что невозможно. Таким образом получается противоречие: поле не должно меняться, но оно поменялось.

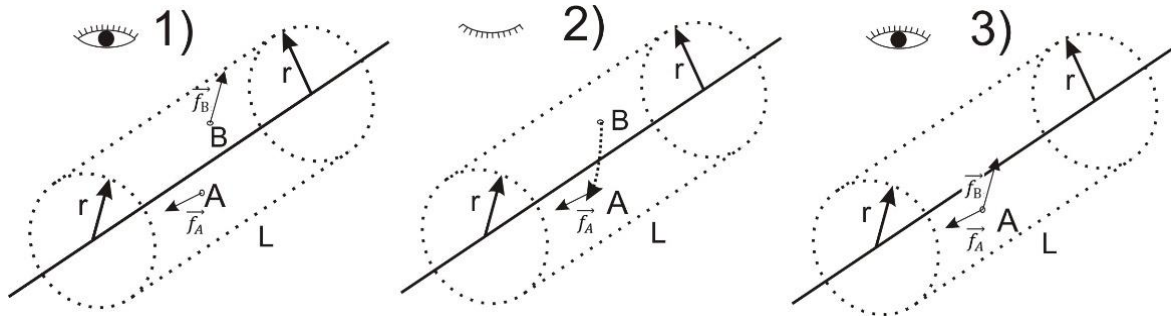


Рис. 2.30

Отсюда следует вывод, что поля  $\vec{f}_A$  и  $\vec{f}_B$  равны, а это возможно только в том случае, если в любой точке на боковой поверхности цилиндра величины полей будут равны и направлены перпендикулярно боковой поверхности цилиндра, то есть по нормали к ней.

Найдем это поле посчитав поток. В этом случае поток необходимо считать через поверхность цилиндра с некоторой длиной  $l$ . Суммарный поток равен сумме двух частей: 1) через боковую поверхность; 2) через две торцевые поверхности.

Найдем поток через боковую поверхность:  $\Psi_f = \oint_{S[V]} (\vec{f} \cdot d\vec{S}) = \{\vec{f} \parallel d\vec{S}\} = \oint_{S[V]} f \cdot dS = f \oint_{S[V]} dS = f \cdot 2\pi r l$ , где  $l$  – длина цилиндра вдоль оси симметрии. При преобразованиях было учтено, что поле параллельно нормали к поверхности и поэтому можно упростить скалярное произведение, в котором косинус угла между параллельными векторами равен 1. Также вынесли величину поля из-под знака интеграла, поскольку оно не зависит от точки боковой поверхности цилиндра и везде на ней одинаково. Сам интеграл равен площади боковой поверхности цилиндра равен  $2\pi r l$ .

Теперь будем искать поток через две торцевые поверхности цилиндра:  $\Psi_f = 2 \oint_{S[V]} (\vec{f} \cdot d\vec{S}) = \oint_{S[V]} f \cdot \cos 90^\circ \cdot dS = \oint_{S[V]} 0 \cdot dS = 0$ . Как мы выяснили выше, наше поле направлено перпендикулярно оси системы, но нормали торцевых поверхностей направлены вдоль оси системы, то есть угол между нормальями к торцевым поверхностям и полем равен 90 градусов и соответственно косинус угла равен 0. Поэтому и поток поля через торцевые поверхности равен 0.

Таким образом, определили, что суммарный поток поля через нашу цилиндрическую поверхность равен  $f \cdot 2\pi r l$ .

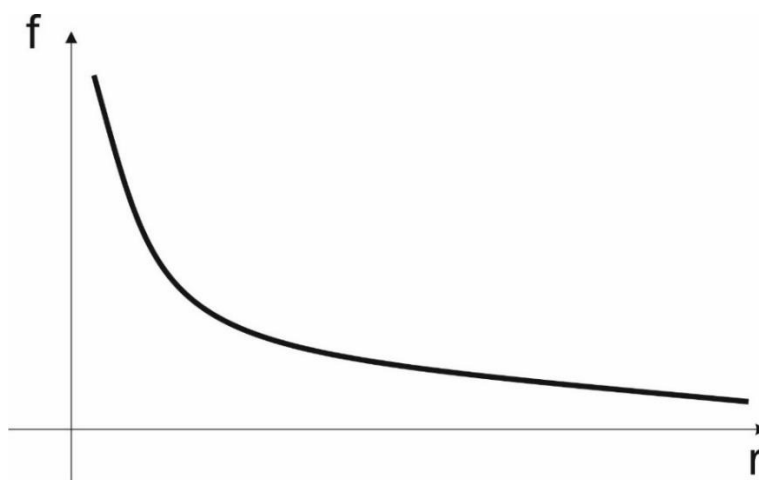
Нам известно, что [3, с. 28], поток поля через замкнутую поверхность равен  $4\pi m$ , где  $m$  – масса которая находится внутри выбранной нами поверхности. Учитывая, что внутри находится только бесконечно тонкая нить с линейной плотностью  $\lambda$ , получаем что масса равна  $\lambda l$ . Обращаем внимание, что величина поля никак не зависит от длины цилиндра, поверхность которого была выбрана для расчета потока.

$$\Psi_f = f \cdot 2\pi r l = 4\pi m = 4\pi \lambda l \Rightarrow f = 2\lambda/r.$$

Направление поля по нормали к бесконечной нити, то есть вдоль радиуса от оси системы к точке, где ищем поле.

Необходимо отметить, что мы нашли поле везде кроме оси, где находится масса ( $r = 0$ ). На этой оси поле не определено, поскольку на ней не работает формула Гаусса-Остроградского из-за неограниченности и не дифференцируемости поля [3, с. 17].

Посмотрим и проанализируем график поля в зависимости от расстояния от оси системы (см. рис. 2.31).



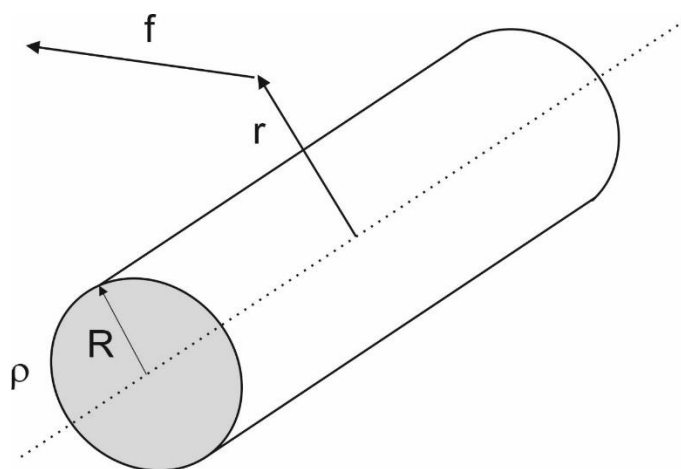
*Рис. 2.31*

Как видно из рисунка, поле описывается гиперболой степени 1. Величина поля при удалении от источника поля уменьшается и стремится к нулю. При приближении к точечной массе величина поля наоборот уве-

личивается и становится очень большой при близком приближении к точечной массе, в пределе бесконечной. Из графика также видно, что поле определено везде, кроме точки  $r = 0$ , о чем было написано выше.

*Ответ:* величина поля равна  $2\lambda/r$  и направлено оно вдоль перпендикуляра от бесконечной нити к точке наблюдения.

12) Найти статическое поле везде от толстой бесконечной проволоки радиусом  $R$  и с равномерно распределенной объемной плотностью  $\rho$ , которая вытянута вдоль одной прямой (см. рис. 2.32).



*Рис. 2.32*

*Решение:*

Для нахождения поля от толстой проволоки необходимо разделить решение задачи на 2 части по числу областей, где мы будем искать поле. В качестве поверхности, через которую будем считать поток поля, выберем цилиндр с некоторой длиной  $l$  и с меняющимся радиусом  $r$ . Найдя поле на поверхности таких цилиндров, мы найдем поле во всем пространстве.

Для начала будем искать поле в области где  $r > R$ , то есть мы находимся не внутри проволоки, а снаружи ее. Как и в задаче № 11 этого раздела у нас есть цилиндрическая симметрия и после проведения таких же рассуждений можно выписать формулу для потока поля:

$f \cdot 2\pi r l = 4\pi m \Rightarrow f = \frac{2m}{lr}$ , где  $m$  – масса проволоки, находящаяся внутри нашего цилиндра.

Эту массу можно легко найти, умножив ее плотность  $\rho$  на объем, который равен  $\pi R^2 l$ , поскольку площадь торцевой поверхности цилиндра равна  $\pi R^2$ , а длина цилиндра  $l$ . В итоге получим, что масса равна:

$$m = \pi R^2 l \cdot \rho, \Rightarrow f = \frac{2m}{rl} = \frac{2\pi R^2 l \cdot \rho}{rl} = \frac{2\pi R^2 \cdot \rho}{r}.$$

Направление поля по нормали к боковой поверхности цилиндра, то есть вдоль перпендикуляра от оси проволоки к точке, где ищем поле.

При  $r < R$ , то есть когда наша поверхность находится внутри толстой проволоки, получим следующие выражения для потока поля:

$f \cdot 2\pi r l = 4\pi m \Rightarrow f = \frac{2m}{lr}$ , но массу нужно считать, учитывая не весь объем занимаемый проволокой, а только тот, который находится внутри нашей цилиндрической поверхности с радиусом  $r$ . Тогда получим:

$$m = \pi r^2 l \cdot \rho, \Rightarrow f = \frac{2m}{rl} = \frac{2\pi r^2 l \cdot \rho}{rl} = 2\pi r \cdot \rho.$$

Направление поля по нормали к боковой поверхности цилиндра, то есть вдоль перпендикуляра от оси проволоки к точке, где ищем поле.

Рассмотрим, как выглядит график величины поля в зависимости от расстояния от центра толстой нити до точки наблюдения (см. рис. 2.33).

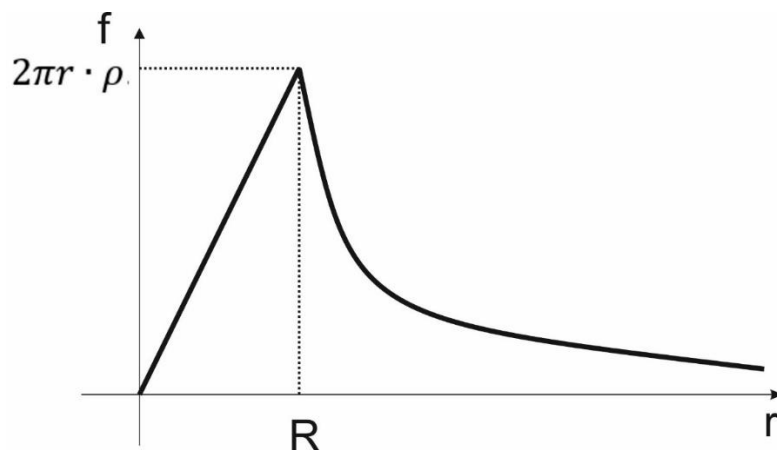


Рис. 2.33

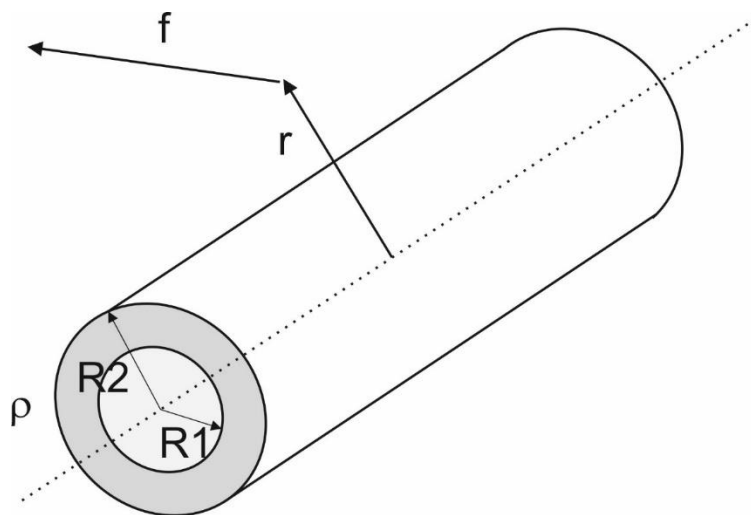


Из рисунка видно, что поле линейно возрастает от 0 до  $2\pi r \cdot \rho$  при  $r < R$ . При  $r > R$  поле быстро спадает по гиперболе степени 1 и стремится к 0, при  $r$  стремящемся к бесконечности.

Поскольку отсутствуют точки, где поле неограниченно возрастает и поле непрерывно, что видно из графиков, то можно сказать что поле у нас определено везде и нет точек, где поле определить невозможно.

*Ответ:* при  $r < R$  величина поля равна  $2\pi r \cdot \rho$  и направлено оно вдоль перпендикуляра от оси бесконечной толстой нити к точке наблюдения; при  $r > R$  величина поля равна  $\frac{2\pi R^2 \cdot \rho}{r}$  и направлена туда же.

13) Найти статическое поле везде от толстой трубы вытянутой вдоль одной прямой с внешним радиусом  $R_2$  и внутренним радиусом  $R_1$  и с равномерно распределенной объемной плотностью  $\rho$  (см. рис. 2.34).



*Рис. 2.34*

*Решение:*

Для нахождения поля от толстой трубы необходимо разделить решение задачи на 3 части по числу областей, где мы будем искать поле:  $r > R_2$ ,  $R_2 > r > R_1$ ,  $r < R_1$ . В качестве поверхности, через которую будем считать поток поля, выберем цилиндр с некоторой длиной  $l$  и с меняющимся радиусом  $r$ . Найдя поле на поверхности таких цилиндров мы найдем поле во всем пространстве.

Решение задачи очень похоже на решение задачи № 10, но только поверхности у нас не сферы, а цилиндры.

Найдем поле в области где  $r > R_2$ , то есть снаружи внешнего радиуса трубы. Проведя такие же рассуждения что и в задаче № 11, увидим, что на боковых поверхностях цилиндра поле одинаково по величине и направлено от оси трубы по перпендикуляру к точке, где ищем поле.

Посчитаем поток поля через такую поверхность:

$$\Psi_f = f \cdot S = f \cdot 2\pi r l = 4\pi m,$$

где  $S$  – площадь боковой поверхности цилиндра (торцевые поверхности мы не учитываем, поскольку поток через них равен 0, см. задача № 11);  $l$  – длина цилиндра, поток через поверхность которого, мы считаем;  $m$  – масса трубы которая находится внутри цилиндра.

Для того чтобы найти массу нужно плотность  $\rho$  умножить на объем, который занимает наша толстая труба. Объем ее равен разнице объемов по внешнему радиусу трубы и по внутреннему радиусу трубы:

$$V = V_2 - V_1 = \pi R_2^2 l - \pi R_1^2 l \Rightarrow m = \rho \cdot \pi l (R_2^2 - R_1^2).$$

Осталось вставить массу в выражение для поля:

$$f \cdot 2\pi r l = 4\pi m \Rightarrow f = \frac{4\pi \rho \pi l (R_2^2 - R_1^2)}{2\pi r l} = \frac{2\pi \rho (R_2^2 - R_1^2)}{r}.$$

Направление поля по нормали к боковой поверхности цилиндра, то есть вдоль перпендикуляра от оси трубы к точке, где ищем поле.

Найдем поле в области где  $r < R_1$ , то есть внутри внутреннего радиуса трубы. Проведя такие же рассуждения, что и в задаче № 11, увидим, что на боковых поверхностях цилиндра поле одинаково по величине и направлено от оси трубы по перпендикуляру к точке, где ищем поле.

Посчитаем поток поля через такую поверхность:

$$\Psi_f = f \cdot S = f \cdot 2\pi r l = 4\pi m,$$

но можно заметить, что внутри цилиндрической поверхности, на которой мы ищем поле нет никакой массы, то есть правая часть равенства равна 0, тогда получается, что и поле равно 0.

Осталось найти поле в области, где  $R2 > r > R1$ . Как и в задаче № 11 выбираем поверхность в виде цилиндра с некоторой длиной  $l$  и радиусом, который удовлетворяет следующему условию  $R2 > r > R1$ , то есть боковая поверхность этого цилиндра находится внутри стенки толстой трубы.

Как и в задаче № 11 посчитаем поток поля через такой цилиндр. Получим следующее:

$$\Psi_f = f \cdot S = f \cdot 2\pi r l = 4\pi m,$$

где  $m$  – масса, заключенная внутри нашего цилиндра. Она равняется плотности  $\rho$  умноженная на объем, где есть масса. Посчитаем этот объем:

$$V = V - V1 = \pi r^2 l - \pi R1^2 l \Rightarrow m = \rho \cdot \pi l (r^2 - R1^2).$$

Осталось вставить массу в выражение для поля:

$$f \cdot 2\pi r l = 4\pi m \Rightarrow f = \frac{4\pi \rho \pi l (r^2 - R1^2)}{2\pi r l} = \frac{2\pi \rho (r^2 - R1^2)}{r}.$$

Направление поля по нормали к боковой поверхности цилиндра, то есть вдоль перпендикуляра от оси трубы к точке, где ищем поле.

Нарисуем и проанализируем график величины поля в зависимости от радиуса, на котором мы смотрим поле (см. рис. 2.35).

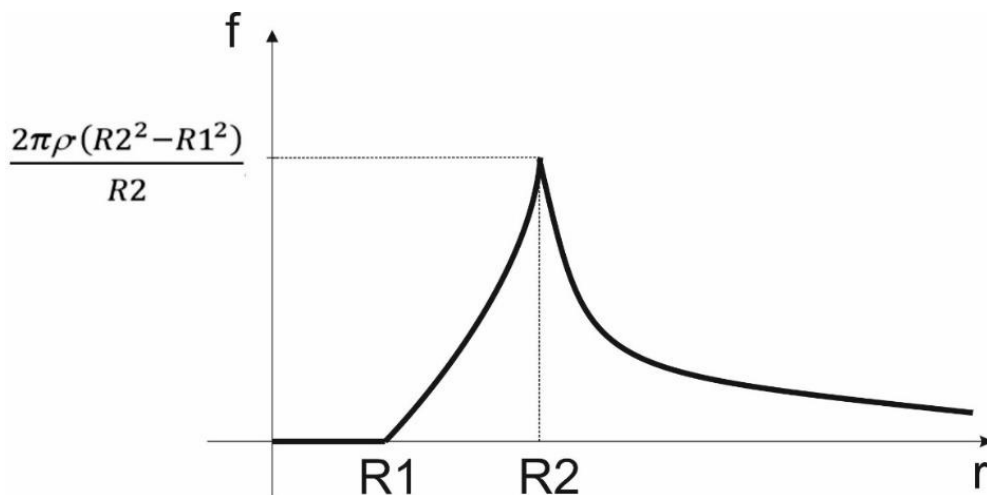


Рис. 2.35

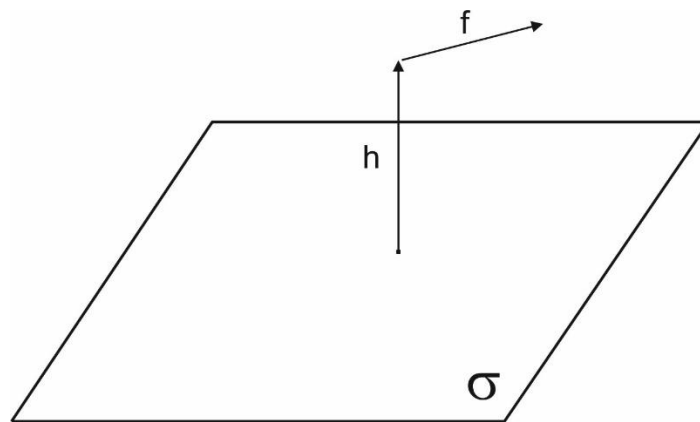
Как и количество областей где мы искали поле, график делится на три части: в первой где  $r < R1$  поле нулевое; во второй где  $R1 < r < R2$

величина поля возрастает от 0 до  $\frac{2\pi\rho(R2^2-R1^2)}{R2}$ , причем скорость возрастания медленнее, чем у линейного закона; далее, в области где  $r > R2$  поле падает по гиперболе степени 1 и на бесконечности стремится к 0.

В данной задаче поле определено везде, поскольку нет точек в пространстве, где поле не ограничено или имеет разрыв.

*Ответ:* при  $r < R1$  величина поля равна 0; при  $R1 > r > R2$  величина поля равна  $\frac{2\pi\rho(r^2-R1^2)}{r}$  и направлено оно вдоль перпендикуляра от оси трубы к точке наблюдения; при  $r > R2$  величина поля равна  $\frac{2\pi\rho(R2^2-R1^2)}{r}$  и направлено оно вдоль перпендикуляра от оси трубы к точке наблюдения.

14) Найти статическое поле везде от бесконечной и бесконечно тонкой плоскости с площадью плотностью массы  $\sigma$  (см. рис. 2.36).



*Рис. 2.36*

*Решение:*

Для удобного решения задачи на нахождение поля через вычисление потока через некоторую поверхность, необходимо правильно выбрать поверхность, на которой будет удобно считать поток поля. В данной задаче мы имеем симметрию относительно плоскости, то есть име-

ется одна выделенная плоскость, и все точки, расположенные на одном расстоянии от этой плоскости, не отличаются. Соответственно, при таком типе симметрии удобнее всего выбирать поверхность в виде параллелепипеда, у которого плоскость с массой проходит через середину (см. рис. 2.37).

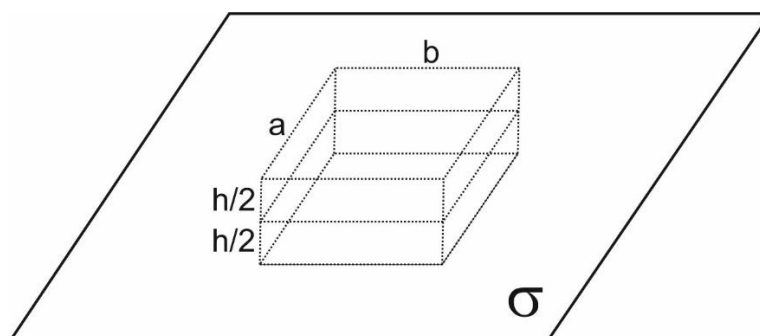


Рис. 2.37

Изменяя высоту и горизонтальные размеры такого параллелепипеда, можно найти поле во всем пространстве. Для нахождения поля необходимо вначале доказать, что на верхней и нижней поверхности такого параллелепипеда искомое статическое поле будет иметь одинаковую величину и направлено перпендикулярно плоскости симметрии. Докажем это аналогично тому, как мы это делали в задачах со сферической симметрией (см. задача № 7).

Допустим на верхней поверхности параллелепипеда есть две точки А и В, и в этих точках поле отличается. Тогда проведем следующие рассуждения: наблюдатель смотрит на нашу систему и видит, что в точке А поле равно величине  $\vec{f}_A$  (см. рис. 2.38, 1). Теперь представьте, что наблюдатель закрыл глаза и его переместили так, что точка В для него теперь совпала с точкой А (см. рис. 2.38, 2) и открыв глаза он увидит, что поле в точке изменилось с  $\vec{f}_A$  на  $\vec{f}_B$ , но никаких других изменений, кроме этого нет (см. рис. 2.38, 3). Бесконечная плоскость никак не поменяла свое местоположение, как была по оси системы, так и осталась, никаких новых объектов не появилось, пространство как было изотропным, так и осталось. То есть для наблюдателя ничего не изменилось, кроме величины поля, что невозможно. Таким образом, получается противоречие: поле не должно меняться, но оно поменялось.

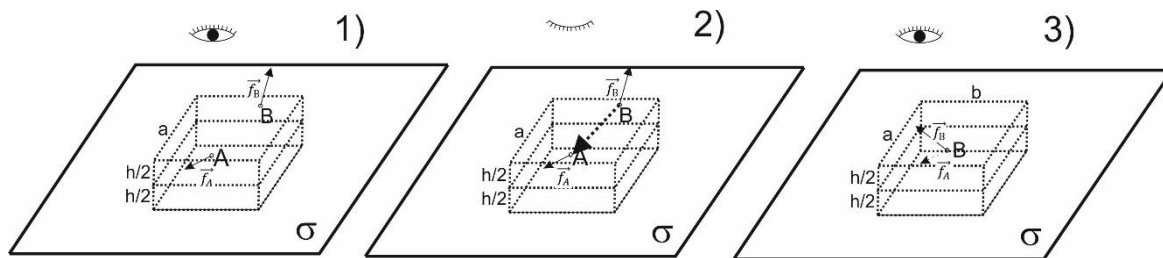


Рис. 2.38

Отсюда следует вывод, что поля  $\vec{f}_A$  и  $\vec{f}_B$  равны, а это возможно только в том случае, если в любой точке на верхней поверхности параллелепипеда величины полей будут равны и направлены перпендикулярно этой поверхности, то есть по нормали к ней.

Мы показали, что сверху плоскости, на одном и том же расстоянии от нее, поле равно во всех точках. Что же будет на нижней плоскости нашего параллелепипеда? Чему будет равно поле там?

Продолжим наши рассуждения о симметрии задачи. Если наши две точки А и В расположены симметрично, но одна точка на верхней плоскости, а другая на нижней, допустим, что поля в этих точках отличаются. Тогда можно закрыть наблюдателю глаза и перевернуть плоскость на 180 градусов так, чтобы точка А встала на место В, и наоборот, В на место А и после этого открыть глаза наблюдателю. Увидим, что для наблюдателя ничего не изменилось плоскость на том же самом месте, точки наблюдения те же самые, расположены в тех же местах, то есть и поля в этих точках должны остаться такими же. Однако они изменились, отсюда следует противоречие: поля в симметричных относительно плоскости симметрии точках равны по величине и направлены в противоположные стороны, но вдоль перпендикулярного направления относительно плоскости симметрии или другими словами плоскости, где сосредоточена масса. Противоположными по направлению поля должны быть потому, что мы для доказательства симметрии поворачивали систему на 180 градусов, то есть и поля в симметричных точках должны отличаться по направлению на 180 градусов, но при этом оба поля должны быть перпендикулярны плоскости симметрии. Это возможно только в случае, когда в симметричных точках поля равны по величине и противоположны по направлению.

Теперь можно считать суммарный поток через поверхности параллелепипеда. Суммарный поток равен сумме трех частей: 1) через верхнюю поверхность; 2) через нижнюю поверхность; 3) через 4 боковые поверхности.

Найдем поток через боковые поверхности:  $\Psi_f = \oint_{S[V]} (\vec{f} \cdot d\vec{S}) = \oint_{S[V]} f \cdot \cos 90^\circ \cdot dS = f \oint_{S[V]} 0 \cdot dS = 0$ . Как мы выяснили выше, наше поле направлено перпендикулярно плоскости, где сосредоточена масса, но нормали боковых поверхностей направлены параллельно этой плоскости, то есть угол между нормалью к боковым поверхностям и полем равен  $90^\circ$  градусов и соответственно косинус угла равен 0. Поэтому и поток поля через боковые поверхности равен 0.

Поток через верхнюю поверхность будет равен:

$$\Psi_f = \oint_{S[V]} (\vec{f} \cdot d\vec{S}) = \{\vec{f} | |\vec{dS}\} = \oint_{S[V]} f \cdot dS = f \oint_{S[V]} dS = f \cdot ab,$$

где  $a$  и  $b$  – длины сторон параллелепипеда. Преобразования учитывают, что поле параллельно нормали к поверхности и поэтому можно убрать скалярное произведение, в котором косинус угла между параллельными векторами равен 1. Также вынесем величину поля из-под знака интеграла, поскольку оно не зависит от точки боковой поверхности цилиндра и везде на ней одинаково. Сам интеграл равен площади верхней поверхности параллелепипеда и равняется  $ab$ .

Поток через нижнюю поверхность будет равен:

$$\Psi_f = \oint_{S[V]} (\vec{f} \cdot d\vec{S}) = \{\vec{f} | |\vec{dS}\} = \oint_{S[V]} f \cdot dS = f \oint_{S[V]} dS = f \cdot ab,$$

где  $a$  и  $b$  – длины сторон параллелепипеда. Преобразования учитывают, что поле параллельно нормали к поверхности и поэтому можно убрать скалярное произведение, в котором косинус угла между параллельными векторами равен 1. Также вынесли величину поля из-под знака интеграла, поскольку она не зависит от точки боковой поверхности цилиндра и везде на ней одинаково. Сам интеграл равен площади верхней поверхности параллелепипеда и равняется  $ab$ . Отличие от верхней поверхности состоит в том, что поле снизу у нас направлено вниз, но и нормаль тоже

направлена вниз, и в итоге получается, что угол между векторами не изменился и величина потока равна величине потока сверху и также положительна, как и сверху, несмотря на то что само поле направлено в противоположную сторону.

Таким образом, определили, что суммарный поток поля через все поверхности нашего параллелепипеда равен сумме потоков сверху и снизу  $2 \cdot (f \cdot ab)$ .

В итоге запишем наше уравнение потока:

$$\Psi_f = f \cdot 2ab = 4\pi m,$$

где  $m$  – масса, заключенная внутри нашего параллелепипеда. Она равняется следующему: поверхностная плотность  $\sigma$  умноженная на площадь поверхности внутри параллелепипеда.

$$f \cdot 2ab = 4\pi m = 4\pi \cdot \sigma ab \Rightarrow f = 2\pi\sigma.$$

Необходимо отметить, что величина поля сверху и снизу одинакова, но направления противоположны: сверху поле направлено вверх, а снизу соответственно вниз.

Важным является то, что поле никак не зависит от расстояния до плоскости, то есть в любой точке полупространства сверху поле одинаково и по величине, и по направлению, та же ситуация и снизу. Кроме того, величины полей также не зависят от размеров параллелепипеда.

Нарисуем график величины поля в зависимости от расстояния от поверхности с массой (см. рис. 2.39).

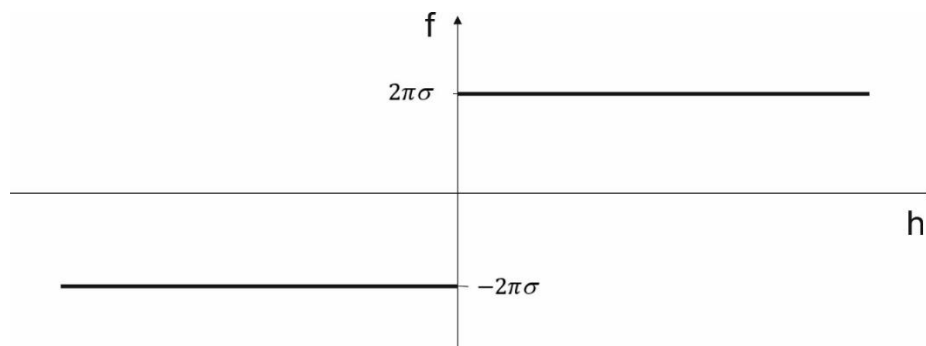


Рис. 2.39

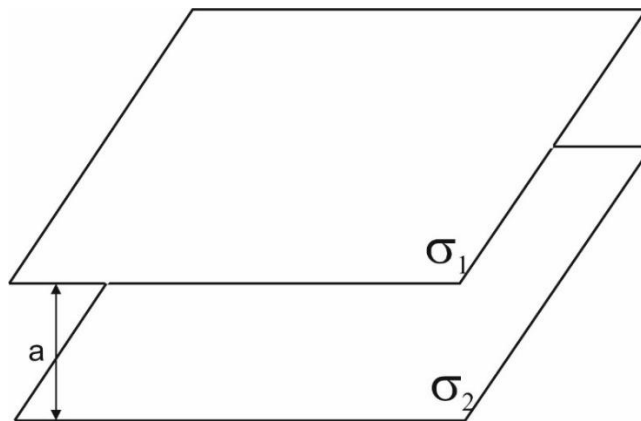


На графике видно, что величина поля снизу равна  $-2\pi\sigma$ , что означает, что снизу направление поля вниз. После перехода через плоскость с массой, поле резко скачком меняется и становится равным  $2\pi\sigma$ . Причем это значение не меняется при всех удалениях от плоскости, даже на бесконечном удалении величина остается равной  $2\pi\sigma$ .

Поскольку поле в месте где расположена плоскость терпит разрыв, то в этом месте поле определить нельзя, согласно определению формулы Гаусса [3, с. 17–18].

*Ответ:* при  $h < 0$  величина поля равна  $2\pi\sigma$  и направлено вниз; при  $h > 0$  величина поля равна  $2\pi\sigma$  и направлено вверх. Или можно сказать другими словами: при  $h < 0$  величина поля равна  $-2\pi\sigma$ ; при  $h > 0$  величина поля равна  $2\pi\sigma$ .

15) Найти статическое поле везде от двух бесконечных и бесконечно тонких плоскостей, которые параллельны друг другу с площадью плотностью массы  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Расстояние между плоскостями  $a$  (см. рис. 2.40).



*Рис. 2.40*

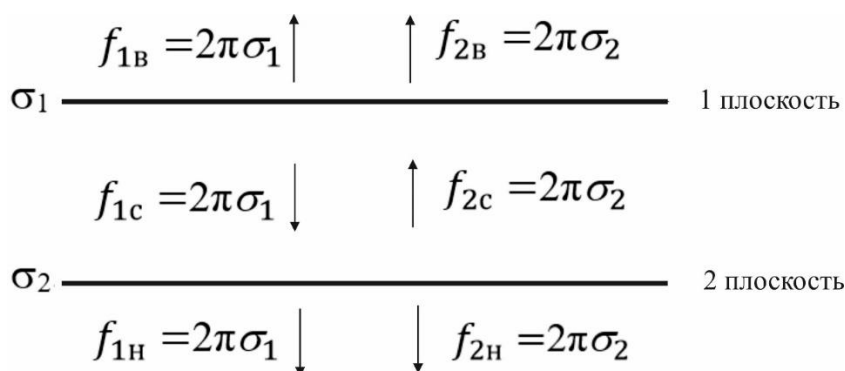
*Решение:*

Для решения этой задачи нам нужно использовать рассуждения и ответ задачи № 14. В ней было найдено выражение для поля от одной бесконечно тонкой плоскости с поверхностной плотностью  $\sigma$ , которое было равно  $2\pi\sigma$ . Направление поля было вдоль нормали к плоскости и направлено от нее.

В данной задаче мы видим две таких плоскости, каждая со своей поверхностной плотностью массы. Понятно, что каждая из этих плоскостей создает свое поле, такое как описано в задаче № 14. Нам нужно найти суммарное поле.

Вспомним, что наши поля обладают свойством аддитивности, что означает следующее – суммарное поле от двух источников равняется сумме полей от этих источников.

Две плоскости разделяют пространство на 3 области: верхняя – обе плоскости ниже него, нижняя – обе плоскости выше него, средняя – пространство между плоскостями. Используя предыдущую задачу найдем, что поле в верхней части от первой плоскости равно  $f_{1В} = 2\pi\sigma_1$  и направлено вверх, от второй плоскости  $f_{2В} = 2\pi\sigma_2$  и тоже направлено вверх (см. рис. 2.41).



*Рис. 2.41*

В нижней части пространства поля следующие от первой плоскости равно  $f_{1с} = 2\pi\sigma_1$  и направлено вниз, от второй плоскости  $f_{2с} = 2\pi\sigma_2$  и направлено вверх.

В нижней части пространства поля от плоскостей равны : от первой плоскости равно  $f_{1Н} = 2\pi\sigma_1$  и направлено вниз, от второй плоскости  $f_{2Н} = 2\pi\sigma_2$  и тоже направлено вниз.

Осталось просуммировать поля от двух плоскостей в каждой области с учетом направления. В итоге получим: в верхней области суммарное поле равно  $f_{В} = 2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)$  направленное вверх; в нижней области

поле равно  $f_H = 2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)$  направленное вниз; в области между плоскостями поле равно  $f_C = |2\pi(\sigma_1 - \sigma_2)|$  при этом направление зависит от соотношения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , если  $\sigma_1 > \sigma_2$ , то поле направлено вниз, если  $\sigma_1 < \sigma_2$ , то поле направлено вверх.

Ответ: в верхней области суммарное поле равно  $f_B = 2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)$  направленное вверх; в нижней области поле равно  $f_H = 2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)$  направленное вниз; в области между плоскостями поле равно  $f_C = |2\pi(\sigma_1 - \sigma_2)|$  при этом если  $\sigma_1 > \sigma_2$ , то поле направлено вниз, если  $\sigma_1 < \sigma_2$ , то поле направлено вверх.

16) Найти статическое поле везде от бесконечной толстой плоскости с объемной плотностью массы  $\rho$  и толщиной  $a$  (см. рис. 2.42).

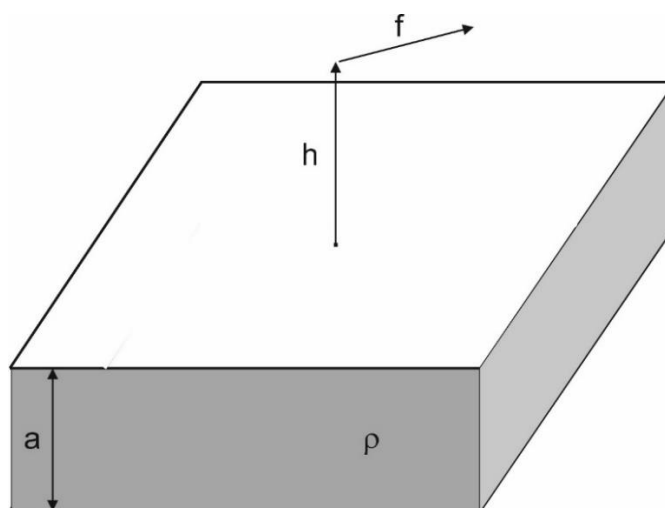


Рис. 2.42

*Решение:*

По аналогии с задачей № 14 будем искать поле от толстой плоскости используя формулу для потока поля. Для удобного расчета нам необходимо выбрать правильную поверхность, чтобы легко посчитать поток. Поскольку в этой задаче, как и в задаче № 14 у нас есть симметрия относительно середины толстой пластины, тогда понятно, что лучше всего выбрать поверхность в виде параллелепипеда, причем удобнее чтобы середина высоты его совпадала с серединой пластины.

Латеральные (горизонтальные) размеры параллелепипеда можно взять одинаковыми и равными  $l$ . Высоту обозначим как  $2h$ , чтобы расстояние от середины до верхней или нижней грани были равны  $h$ .

Если провести такие же рассуждения, что и в задаче № 14, то можно увидеть, что на одной и той же высоте от середины пластины поле будет одинаково по величине и направлено перпендикулярно к поверхности пластины сверху будет направлено вверх, а снизу поле будет направлено вниз.

Понятно, что если мы будем менять высоту нашей поверхности  $h$  от 0 до бесконечности, то мы сможем найти поле во всем пространстве. Видно, что расчет потока поля нужно делать по разному для двух областей пространства: 1)  $h < a/2$ , то есть верхняя и нижняя грани находятся внутри пластины; 2)  $h > a/2$ , то есть верхняя и нижняя грань поверхности, через которую считаем поток, находятся вне пластины с массой (см. рис. 2.43).

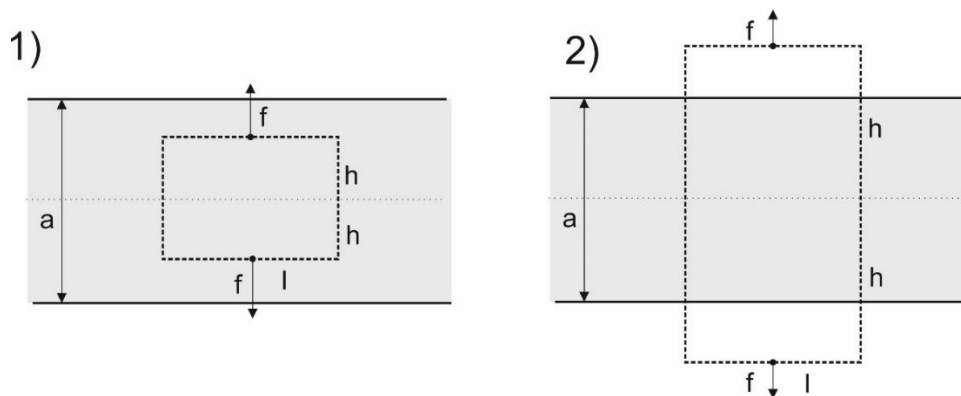


Рис. 2.43

Сначала найдем поле в области, где  $h < a/2$ . Посчитаем поток через все 6 граней нашего параллелепипеда. Как мы уже показали, на верхней грани поле параллельно нормали, поэтому можно избавиться от скалярного произведения под знаком интеграла в выражении потока, и тогда получим

$$\Psi_f = \oint_{s[V]} (\vec{f} \cdot d\vec{S}) = \{f \parallel \vec{dS}\} = \oint_{s[V]} f \cdot dS = f \oint_{s[V]} dS = f \cdot l^2.$$

На нижней грани поле направлено вниз, но и нормаль тоже вниз, тогда получим, что поток равен:

$$\Psi_f = \oint_{s[V]} (\vec{f} \cdot d\vec{S}) = \{\vec{f} \parallel d\vec{S}\} = \oint_{s[V]} f \cdot dS = f \oint_{s[V]} dS = f \cdot l^2.$$

Если мы будем считать потоки через боковые грани, то на них поле перпендикулярно нормальям, поле направлено вверх или вниз, а нормали направлены вдоль пластины с массой. Тогда получаем поток через любую боковую грань:

$$\Psi_f = \oint_{s[V]} (\vec{f} \cdot d\vec{S}) = \oint_{s[V]} f \cdot \cos 90^\circ \cdot dS = \oint_{s[V]} f \cdot 0 \cdot dS = 0.$$

Тогда суммарный поток через все 6 граней будет равен сумме потоков через верх и низ:  $\Psi_f = \oint_{s[V]} (\vec{f} \cdot d\vec{S}) = 2 \cdot f \cdot l^2$ .

Осталось найти, что будет в правой части выражения для потока, где стоит масса, которая заключена внутри параллелепипеда:

$$4\pi m = 4\pi \cdot V\rho = 4\pi\rho \cdot 2hl^2.$$

Тогда можно выразить поле в области 1):

$$\Psi_f = 2 \cdot f \cdot l^2 = 4\pi\rho \cdot 2hl^2 \Rightarrow f = 4\pi\rho h.$$

Найдем поле в области 2). Рассуждения будут аналогичны тем, которые мы делали для области 1), за исключением того, что масса, заключенная внутри параллелепипеда, будет другой:

$$4\pi m = 4\pi \cdot V\rho = 4\pi\rho \cdot al^2.$$

Тогда поле можно выразить так:

$$\Psi_f = 2 \cdot f \cdot l^2 = 4\pi\rho \cdot al^2 \Rightarrow f = 2\pi\rho a.$$

Ответ: при  $h < a/2$  поле будет равно  $4\pi\rho h$  и направлено по нормали к поверхности выше середины пластины вверх, а ниже середины пластины вниз; при  $h > a/2$  поле будет равно  $2\pi\rho a$  и направлено по нормали к поверхности выше пластины вверх, а ниже пластины вниз.

### 3. Статические поля в присутствии среды

В этой теме рассмотрим уравнения, а также следующие из физических законов и этих уравнений особенности, присущие статическим полям: 1) электростатическое поле  $\vec{E}$  в присутствии проводников; 2) электростатическое поле  $\vec{E}$  в присутствии диэлектриков; 3) магнитостатическое поле  $\vec{H}$  в присутствии магнетиков. Математическое описание этих полей во втором и третьем случаях – во многом идентично.

В телах, называемых проводниками, есть свободные микроскопические заряды (ионы, электроны), которые могут совершать направленное (упорядоченное) перемещение под действием приложенных к ним сил.

Пусть занимающий область пространства проводник – электрически нейтрален, его суммарный заряд равен нулю. Если мы поместим этот проводник в электрическое поле, то на микроскопические заряды в проводнике будут действовать силы  $\overline{dF}^+$  и  $\overline{dF}^-$  (см. рис. 3.1, 1), в результате чего эти свободные заряды будут перемещаться к поверхности  $S[V_i]$  проводника.

На одной части границы  $S[V_i]$  проводника образуется избыток положительных зарядов, на другой – избыток отрицательных зарядов. Эти заряды создают вторичное электрическое поле  $\vec{E}^B$  и фактически будет существовать суммарное электрическое поле  $\vec{E} = \vec{E}^n + \vec{E}^B$ , отличающееся от того поля  $\vec{E}^n$ , которое мы наблюдали бы в отсутствие проводника (см. рис. 3.1, 2).

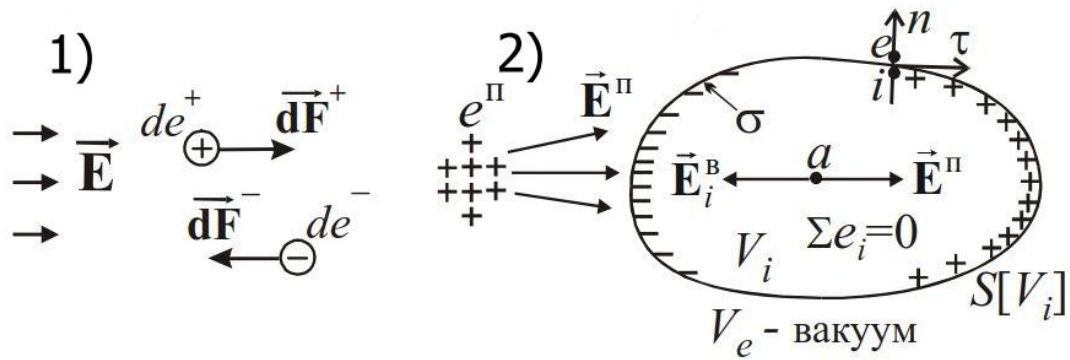


Рис. 3.1

В случае статического поля  $\vec{E}$  в занятой проводником области  $V_i$  суммарное поле  $\vec{E}(a) = \vec{E}^{\text{II}}(a) + \vec{E}^{\text{B}}(a) = 0$ , а вторичное поле индуцированных зарядов  $\vec{E}^{\text{B}}(a) = -\vec{E}^{\text{II}}(a)$ .

Из уравнения  $\text{div } \vec{E} = \frac{\delta}{\epsilon_0}$  следует, что в проводнике объёмная плотность электрических зарядов  $\delta_i = \epsilon_0 \text{div } \vec{E}_i$ . Так как в  $V_i$   $\vec{E}_i = 0$ , то  $\text{div } \vec{E}_i = 0$  и  $\delta_i = 0$ . То есть и в присутствии  $\vec{E}^{\text{II}}$  в каждом элементарном объёме  $dV$  проводника алгебраическая сумма микроскопических зарядов осталась равной нулю. Все источники поля  $\vec{E}^{\text{B}}$  лежат на поверхности проводника.

В диэлектриках (или магнетиках) могут находиться источники соответственно электростатического поля  $\vec{E}$  (или магнитостатического поля  $\vec{H}$ ). Существование этих источников обусловлено такими явлениями, как поляризация диэлектриков или намагничивание магнетиков.

1) Электростатическое поле. Представим уравнение  $\text{div } \vec{E} = \frac{\delta_{\text{пол}}}{\epsilon_0}$  в следующем виде:

$$\epsilon_0 \text{div } \vec{E} + \text{div } \vec{P} = \delta_{\text{свб}} \text{ или } \text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \delta_{\text{свб}},$$

где  $\vec{P}$  – временная поляризация. Введя обозначение:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

получаем уравнение для вектора электрической индукции (электрического смещения)  $\vec{D}$ :

$$\text{div } \vec{D} = \delta_{\text{свб}}.$$

При этом следует:

$$\vec{D} = \varepsilon_0(1 + \chi)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E} = \varepsilon_a\vec{E},$$

где  $(1 + \chi) = \varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость,  $\varepsilon_0\varepsilon = \varepsilon_a$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость. Понятно, что в отсутствие среды, в вакууме (практически в воздухе) имеем  $\chi = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon_a = \varepsilon_0$ ,  $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ . Тогда:

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0\vec{E}) = \frac{\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon_0}.$$

2) Магнитостатическое поле. Представим уравнение  $\operatorname{div} \vec{H} = \delta_{\text{свз}}$  в следующем виде:

$$\mu_0 \operatorname{div} \vec{H} = -\mu_0 \operatorname{div} \vec{J} \text{ или } \operatorname{div}(\mu_0(\vec{H} + \vec{J})) = 0,$$

где  $\vec{J}$  – временная намагниченность. Введя обозначение:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})$$

получаем уравнение для вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

При этом следует:

$$\vec{B} = \mu_0(\mu\vec{H} + \vec{J}_0) = \mu_a\vec{H} + \mu_0\vec{J}_0,$$

где  $(1 + \varkappa) = \mu$  – магнитная проницаемость,  $\mu_0\mu = \mu_a$  – абсолютная магнитная проницаемость. Понятно, что в отсутствие среды, в вакууме, (практически в воздухе) имеем  $\varkappa = 0$ ,  $\mu = 1$ ,  $\mu_a = \varepsilon\mu_0$ ,  $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ . Тогда:

$$\operatorname{div}(\mu_0\vec{H}) = \delta_0.$$

Рассмотрим, как будет меняться статическое поле на границе двух сред. Пусть  $S_{oc}$  – граница двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  (см. рис. 3.2, 1). Будем полагать, что на  $S_{oc}$  нет свободных электрически зарядов и двойных электрических слоёв. Тогда на  $S_{oc}$  поверхностные плотности  $\sigma_{\text{свб}} = 0$ ,  $\eta_{\text{плн}} = 0$  и можно получить:

$$E_{\tau}^{(2)} = E_{\tau}^{(1)}, \varepsilon_2 E_n^{(2)} = \varepsilon_1 E_n^{(1)},$$



то есть при указанных выше условиях тангенциальная (касательная к  $S_{oc}$ ) компонента  $E_\tau$  непрерывна на  $S_{oc}$ , а (при  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ ) нормальная к  $S_{oc}$  компонента  $E_n$  поля  $\vec{E}$  терпит разрыв на этой поверхности:

$$E_n^{(2)} = \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) E_n^{(1)}.$$

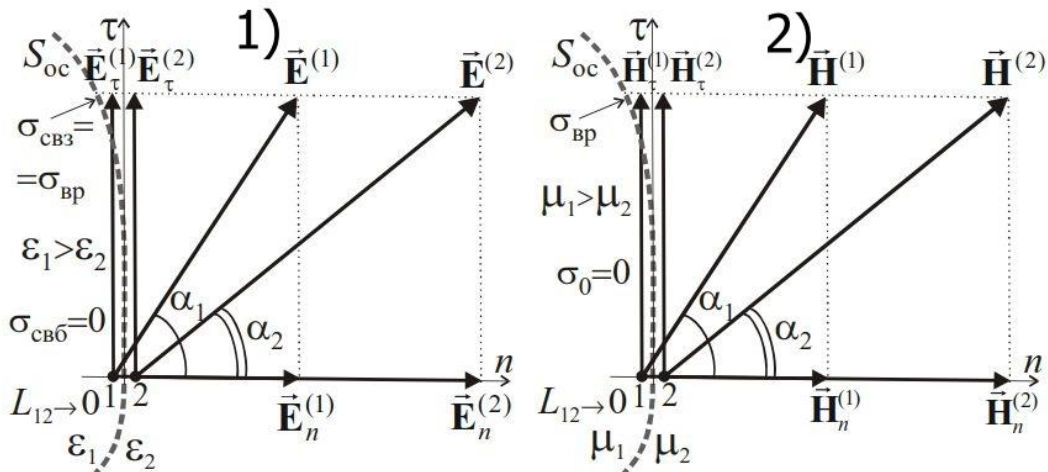


Рис. 3.2

В соответствии с уравнением связи:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

следовательно,

$$\frac{E_n^{(1)}}{E_n^{(2)}} = \frac{\varepsilon_1 D_n^{(1)}}{\varepsilon_2 D_n^{(2)}}.$$

Но если на  $S_{oc}$  поверхностная плотность  $\sigma_{свб} = 0$ , то

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)}, \quad \text{и} \quad \frac{E_n^{(1)}}{E_n^{(2)}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Следовательно, при принятых условиях

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

отношение тангенсов углов  $\alpha_{1,2}$  равно отношению диэлектрических проницаемостей  $\varepsilon_{1,2}$ , (см. рис. 3.2, 1).

Для границы двух магнетиков получим следующее. Пусть  $S_{oc}$  – граница двух магнетиков с магнитными проницаемостями  $\mu_1, \mu_2$  (см. рис. 3.2, 2). На  $S_{oc}$  поверхностные плотности магнитных зарядов  $\sigma_{свб} = 0, \eta_{плн} = 0$  и можно получить:

$$H_{\tau}^{(2)} = H_{\tau}^{(1)}, \mu_2 H_n^{(2)} = \mu_1 H_n^{(1)},$$

то есть при указанных выше условиях тангенциальная (касательная к  $S_{oc}$ ) компонента  $H_{\tau}$  непрерывна на  $S_{oc}$ , а (при  $\mu_1 \neq \mu_2$ ) нормальная к  $S_{oc}$  компонента  $H_n$  поля  $\vec{H}$  терпит разрыв на этой поверхности:

$$H_n^{(2)} = \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) H_n^{(1)}.$$

В соответствии с уравнением связи:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu},$$

следовательно,

$$\frac{H_n^{(1)}}{H_n^{(2)}} = \frac{\mu_1 B_n^{(1)}}{\mu_2 B_n^{(2)}}.$$

Но если на  $S_{oc}$  поверхностная плотность магнитных зарядов  $\sigma_{свб} = 0$ , то,

$$B_n^{(1)} = B_n^{(2)}, \text{ и } \frac{H_n^{(1)}}{H_n^{(2)}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Следовательно, при принятых условиях,

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

отношение тангенсов углов  $\alpha_{1,2}$  равно отношению магнитных проницаемостей  $\mu_{1,2}$ , (см. рис. 3.2, 2).

## Задачи

1) Найти статическое электрическое поле везде от бесконечной тонкой плоскости с площадью плотностью заряда  $\sigma$ . Сверху плоскости вакуум, снизу среда с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  (см. рис. 3.3).

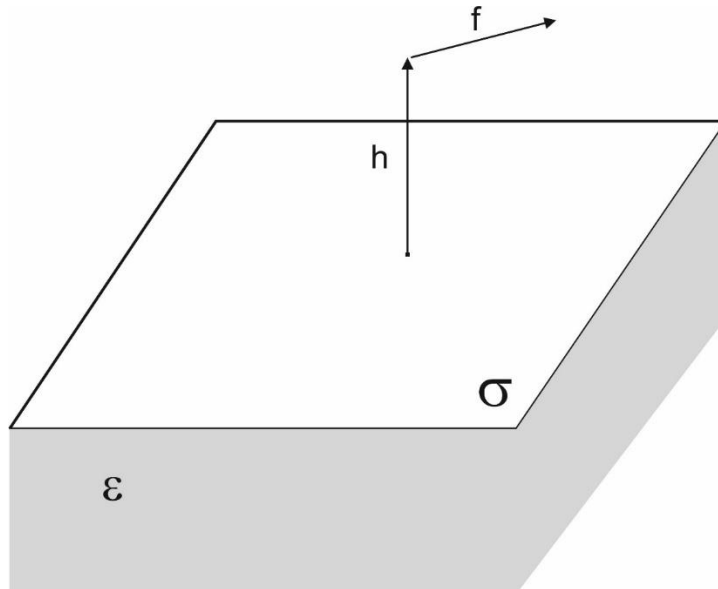


Рис. 3.3

*Решение:*

При решении этой задачи воспользуемся ответом задачи № 14 из предыдущего раздела. В ней мы нашли поле от бесконечной бесконечно тонкой плоскости, заряженной с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Ответ был  $2\pi\sigma$  везде, и сверху поле направлено вверх, а снизу вниз.

Таким образом воспользовавшись ответом получим, что в нашей задаче в верхней области получится такой же ответ, поскольку нет никаких дополнительных факторов, которые бы могли наше электростатическое поле изменить, то есть сверху будет поле  $E_{\text{в}} = 2\pi\sigma$ , направленное вверх.

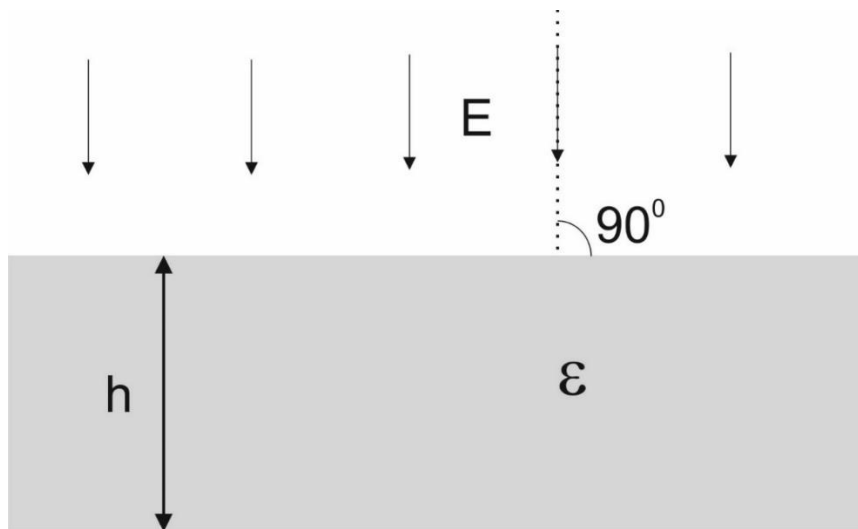
Нижнее полупространство с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  меняет поле, но только там, где есть диэлектрическая проницаемость отличающаяся от 1. То есть поле в верхнем полупространстве поменаться не может, но в нижнем будет меняться.

Известно, что для всех сред в электростатике неизменным остается вектор электрической индукции  $D$ . То есть в нижнем, и в верхнем полупространстве соответствующие поля  $D_H$  и  $D_B$  одинаковы по величине, то есть:

$$D_B = D_H \Rightarrow E_B = \varepsilon E_H \Rightarrow 2\pi\sigma = \varepsilon E_H \Rightarrow E_H = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}.$$

*Ответ:* сверху плоскости электростатическое поле равно  $2\pi\sigma$  и направлено вверх от плоскости, снизу от плоскости электростатическое поле равно  $\frac{2\pi\sigma}{\varepsilon}$  и направлено вниз от плоскости.

2) В равномерное электрическое поле  $E$  перпендикулярно полю помещена бесконечная толстая пластина с толщиной  $h$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Найти электрическое поле везде (см. рис. 3.4).



*Рис. 3.4*

*Решение:*

Напомним, что в электростатике в присутствии сред, в отличие от ситуации без сред, у нас будут выполняться те же уравнения статического поля, но уже не для вектора  $E$ , а для вектора  $D$ .

Воспользуемся этим при решении задачи. В данном случае, поскольку у нас нет никаких дополнительных зарядов, которые могут менять поле  $D$ , можно сказать что поле  $D$  во всем пространстве будет сохраняться, как внутри пластин, так и вне их.

Тогда в области без пластины вектор электрической индукции  $D_0$  будет равен:  $D_0 = \varepsilon_0 E$ . В области с пластиной вектор электрической индукции  $D_1$  будет равен  $D_0$ . Тогда:

$$D_0 = D_1 \Rightarrow \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \varepsilon E_1 \Rightarrow E_1 = \frac{E}{\varepsilon}.$$

То есть электрическое поле внутри пластины будет направлено также, как и первоначально, перпендикулярно поверхностям пластины и его величина равна  $\frac{E}{\varepsilon}$ .

*Ответ:* в области без пластины поле не изменится и останется равным  $E$  и направлено перпендикулярно поверхности пластины; внутри пластины поле равно  $\frac{E}{\varepsilon}$  и направлено туда же, что и первоначальное.

3) В равномерное электрическое поле  $E$  перпендикулярно полю помещены две толстые пластины с толщинами  $h_1$  и  $h_2$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  соответственно. Пластины плотно прижаты друг к другу. Найти электрическое поле везде (см. рис. 3.5).

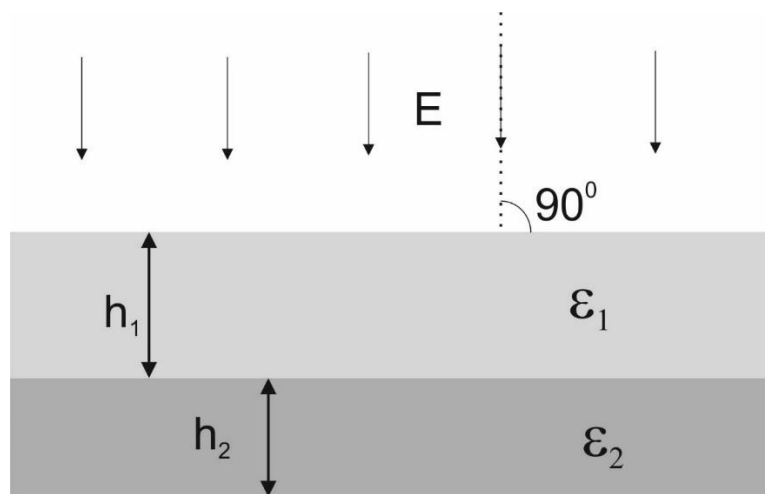


Рис. 3.5

*Решение:*

Если посмотреть на решение предыдущей задачи, то можно увидеть аналогию: в электрическое поле поместили пластины, в данном случае две, с различными диэлектрическими проницаемостями и поле внутри них из-за этого изменится. Причем, как и в предыдущей задаче, будет оставаться неизменным вектор электрической индукции  $D$ .

Поэтому, можно сразу выписать соотношения для электрических полей внутри пластин:

$$D_0 = D_1 \Rightarrow \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 \Rightarrow E_1 = \frac{E}{\varepsilon_1},$$

$$D_0 = D_2 \Rightarrow \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2 \Rightarrow E_2 = \frac{E}{\varepsilon_2},$$

где  $D_0$  – электрическая индукция вне пластин,  $D_1$  – электрическая индукция в первой пластине,  $D_2$  – электрическая индукция во второй пластине,  $E_1$  – электрическое поле в первой пластине,  $E_2$  – электрическое поле во второй пластине.

*Ответ:* в области без пластин поле не изменится, останется равным  $E$  и направлено перпендикулярно поверхности пластин; внутри первой пластины поле равно  $\frac{E}{\varepsilon_1}$  и направлено туда же что и первоначальное; внутри второй пластины поле равно  $\frac{E}{\varepsilon_2}$  и направлено туда же что и первоначальное.

4) Найти электростатическое поле везде от двух бесконечных и бесконечно тонких плоскостей с площадью плотностью массы  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , и которые параллельны друг другу. Расстояние между плоскостями  $a$ . Между плоскостями помещена среда с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  (см. рис. 3.6).



Рис. 3.6

*Решение:*

Для решения этой задачи можно воспользоваться решением задачи № 1 этого раздела. В этой задаче нашли электростатическое поле от одной заряженной плоскости в среде с диэлектрической проницаемостью, где ответ был  $\frac{2\pi\sigma}{\epsilon}$  и без нее, где ответ  $2\pi\sigma$ .

Поскольку электростатическое поле обладает свойством аддитивности, для расчета полей от двух заряженных пластин нужно сложить поля от каждой по отдельности во всех областях пространства.

В первой области поле от первой плоскости будет равно  $2\pi\sigma_1$  и направлено вверх, от второй плоскости будет равно  $2\pi\sigma_2$  и направлено тоже вверх. Значит суммарное поле в области пространства 1 (то есть сверху обеих пластин) будет равно  $2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)$  и направлено вверх.

В третьей области поле от первой плоскости будет равно  $2\pi\sigma_1$  и направлено вниз, от второй плоскости будет равно  $2\pi\sigma_2$  и направлено тоже вниз. Значит суммарное поле в области пространства 3 (то есть снизу обеих пластин) будет равно  $2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)$  и направлено вниз.

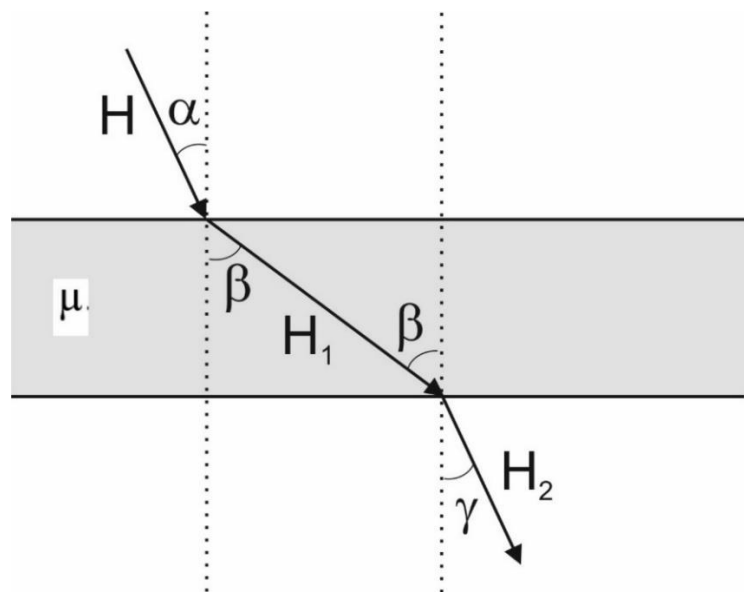
Во второй области у нас есть среда с диэлектрической проницаемостью, соответственно нужно брать для суммирования поля с учетом среды. От первой пластины поле будет  $\frac{2\pi\sigma_1}{\epsilon}$  и направлено вниз, от второй пластины поле будет  $\frac{2\pi\sigma_2}{\epsilon}$  и направлено вверх. Значит суммарное поле будет равно:

$$E = \left| \frac{2\pi\sigma_1}{\epsilon} - \frac{2\pi\sigma_2}{\epsilon} \right| = \left| \frac{2\pi(\sigma_2 - \sigma_1)}{\epsilon} \right|.$$

Поле в области 2 определено по модулю, потому что направление его зависит от соотношения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , если  $\sigma_1 > \sigma_2$  то поле в области 2 будет направлено вниз, если  $\sigma_1 < \sigma_2$  то поле в области 2 будет направлено вверх.

*Ответ:* в области 1 величина электрического поля равна  $2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)$  и направлено оно вверх; в области 3 величина электрического поля равна  $2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)$  и направлено оно вниз; в области 2 величина электрического поля равна  $\left| \frac{2\pi(\sigma_2 - \sigma_1)}{\varepsilon} \right|$ , если  $\sigma_1 > \sigma_2$  поле будет направлено вниз, если  $\sigma_1 < \sigma_2$  поле направлено вверх.

5) В магнитное поле  $H$  помещена бесконечная толстая пластина с магнитной восприимчивостью  $\mu$ . Между полем и нормалью пластины угол  $\alpha$ . Найти магнитное поле везде (см. рис. 3.7).



*Рис. 3.7*

*Решение:*

На лекциях было выведено следующее соотношение  $\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$  [3, с. 77], где индекс 1 обозначает параметры в первой среде, а индекс 2 параметры во второй среде.



В нашем случае на верхней границе среда с индексом 1 это вакуум, а с индексом 2 это пластина с магнитной восприимчивостью  $\mu$ .

Найдем чему будет равен угол  $\beta$  в пластине:

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \Rightarrow \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{\mu}{1} \Rightarrow \tan \beta = \mu \tan \alpha.$$

Внутри пластины магнитное поле будет направлено под углом равным  $\mu \tan \alpha$  к нормали поверхностей пластины. Величину поля можно определить вспомнив, что тангенциальные компоненты векторов  $H$  и  $H_1$  должны быть равны [3, с. 77] (см. рис. 3.8).

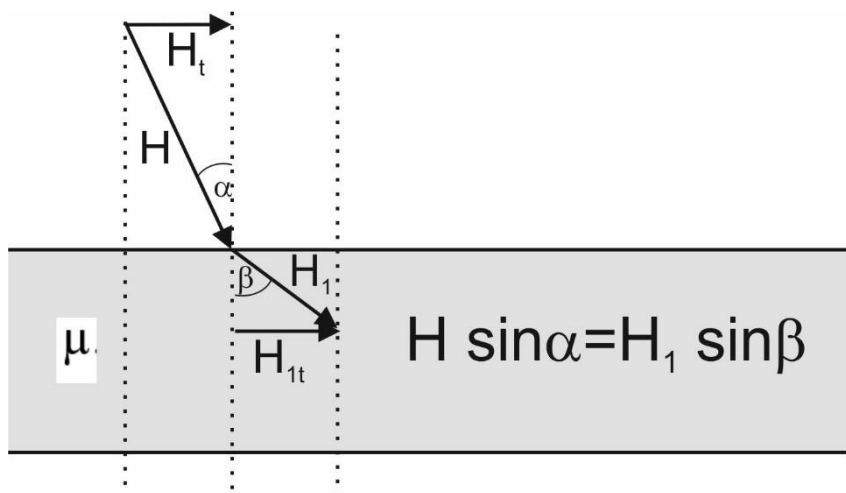


Рис. 3.8

Вспомнив некоторые тригонометрические соотношения, можно записать:

$$\begin{aligned} H \cdot \sin \alpha = H_1 \cdot \sin \beta &\Rightarrow H_1 = H \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \left\{ \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}} \right\} \\ &= H \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \beta}}} = H \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2 \tan^2 \alpha}}} \end{aligned}$$

Теперь посмотрим, что у нас будет на второй границе. В этом случае для соотношения углов  $\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$  среда с индексом 1 это будет уже пластина с магнитной проницаемостью, а индекс 2 соответствует вакууму. Тогда получим:

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \Rightarrow \frac{\tan \gamma}{\tan \beta} = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \tan \gamma = \frac{\tan \beta}{\mu} = \frac{\mu \tan \alpha}{\mu} = \tan \alpha \Rightarrow \gamma = \alpha.$$

Это значит, что после второй границы магнитное поле  $H_2$  снова направлено под начальным углом  $\alpha$ . Найдем теперь величину поля  $H_2$ . Воспользуемся тем же соотношением для тангенциальных компонент полей:

$$H \cdot \sin \alpha = H_1 \cdot \sin \beta = H_2 \cdot \sin \gamma$$

Поскольку мы уже выяснили, что  $\gamma = \alpha$ , тогда

$$H \cdot \sin \alpha = H_2 \cdot \sin \alpha \Rightarrow H = H_2.$$

Величина поля после второй границе будет равна величине поля до первой границы, то есть получаем, что в вакууме направление и величина поля не изменились, внутри же пластины с магнитной проницаемостью  $\mu$  поле изменит направление и величину.

*Ответ:* выше и ниже пластины магнитное поле будет равно  $H$  по величине и направлено под углом  $\alpha$  к нормали поверхностей пластины;

внутри пластины величина магнитного поля будет равна  $H \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2 \tan^2 \alpha}}}$

и направлено оно будет под углом  $\beta$  к нормали поверхностей пластины, где  $\beta$  определяется следующим соотношением  $\tan \beta = \mu \tan \alpha$ .

б) В электрическое поле  $E$  помещены три бесконечные толстые пластины с толщиной  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ , и  $\epsilon_3$  соответственно. Пластины плотно прижаты друг к другу. Между полем и нормалью пластин угол  $\alpha$ . Найти электрическое поле везде (см. рис. 3.9).

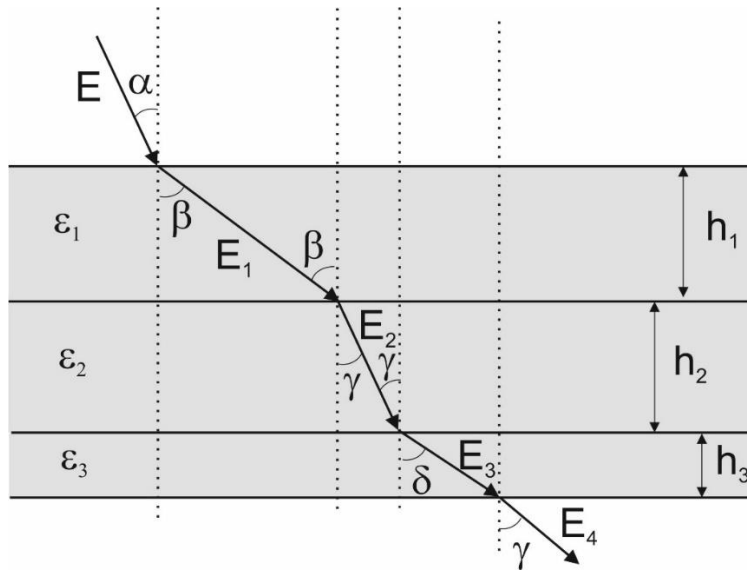


Рис. 3.9

Решение:

На лекциях было выведено следующее соотношение  $\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$  [3, с. 77], где индекс 1 обозначает параметры в первой среде, а индекс 2 параметры во второй среде.

В этой задаче четыре границы, используя соотношение тангенсов углов и диэлектрических проницаемостей можно определить направления электрических полей внутри всех пластин и в нижнем полупространстве.

На первой границе, где индекс 1 это вакуум, а индекс 2 первая пластина, получим:

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \Rightarrow \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{\varepsilon_1}{1} \Rightarrow \tan \beta = \varepsilon_1 \tan \alpha.$$

На второй границе, где индекс 1 это первая пластина, а индекс 2 вторая пластина, получим:

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \Rightarrow \frac{\tan \gamma}{\tan \beta} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \Rightarrow \tan \gamma = \tan \beta \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \varepsilon_1 \tan \alpha \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \varepsilon_2 \tan \alpha.$$

На третьей границе, где индекс 1 это вторая пластина, а индекс 2 третья пластина, получим:

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \Rightarrow \frac{\tan \delta}{\tan \gamma} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \Rightarrow \tan \delta = \tan \gamma \cdot \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \varepsilon_2 \tan \alpha \cdot \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \varepsilon_3 \tan \alpha.$$

На четвертой границе, где индекс 1 это третья пластина, а индекс 2 вакуум, получим:

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{1}{\varepsilon_3} \Rightarrow \frac{\tan \delta}{\tan \varphi} = \frac{1}{\varepsilon_3} \Rightarrow \tan \varphi = \tan \delta \cdot \frac{1}{\varepsilon_3} = \varepsilon_3 \tan \alpha \cdot \frac{1}{\varepsilon_3} = \tan \alpha \Rightarrow \varphi = \alpha.$$

Получили, что в первой пластине электрическое поле направлено под углом  $\beta$ , который определяется соотношением  $\tan \beta = \varepsilon_1 \tan \alpha$ , во второй пластине поле направлено под углом  $\gamma$ , который определяется соотношением  $\tan \gamma = \varepsilon_2 \tan \alpha$ , в третьей пластине поле направлено под углом  $\delta$ , который определяется соотношением  $\tan \delta = \varepsilon_3 \tan \alpha$ , в нижнем полупространстве поле направлено под тем же углом  $\alpha$ , что и в верхнем полупространстве. Все углы отсчитываются от нормали к поверхностям пластин.

Найдем величины электрических полей в каждой из пластин и в нижнем полупространстве. Величину поля можно определить вспомнив, что тангенциальные компоненты полей  $E$  и  $E_1$  на границе должны быть равны [3, с. 77], причем это будет выполняться для всех четырех границ (см. рис. 3.10).

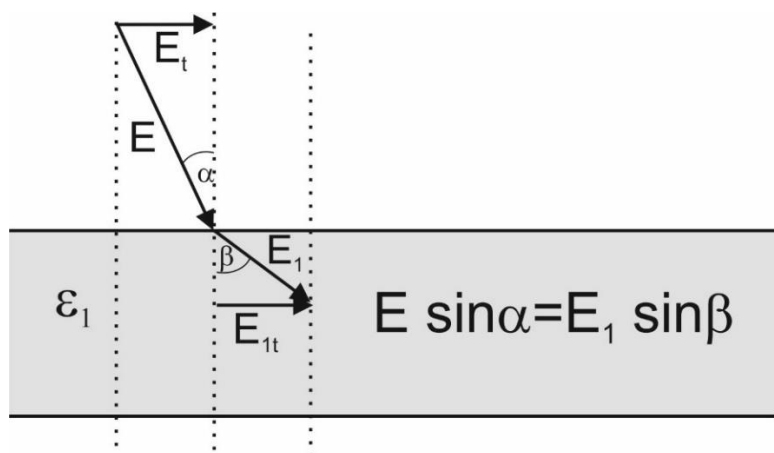


Рис. 3.10

Тогда получим соотношение для поля в первой пластине, вспомнив некоторые тригонометрические соотношения:

$$E \cdot \sin \alpha = E_1 \cdot \sin \beta \Rightarrow E_1 = E \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \left\{ \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}} \right\}$$

$$= E \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \beta}}} = E \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon_1^2 \tan^2 \alpha}}}$$

Поскольку тангенциальные компоненты поля не меняются для всех границ в нашей задаче, тогда можно получить выражения для величин электрических полей в каждой из пластин и в нижнем полупространстве.

Для второй пластины:

$$E \cdot \sin \alpha = E_2 \cdot \sin \gamma \Rightarrow E_2 = E \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \left\{ \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}} \right\}$$

$$= E \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \gamma}}} = E \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon_2^2 \tan^2 \alpha}}}$$

Для третьей пластины:

$$E \cdot \sin \alpha = E_3 \cdot \sin \delta \Rightarrow E_3 = E \frac{\sin \alpha}{\sin \delta} = \left\{ \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}} \right\}$$

$$= E \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \delta}}} = E \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon_3^2 \tan^2 \alpha}}}$$

В нижнем полупространстве получим:

$$E \cdot \sin \alpha = E_4 \cdot \sin \varphi \Rightarrow E_4 = E \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = \{\varphi = \alpha\} = E \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = E.$$

*Ответ:* выше и ниже пластин электрическое поле будет равно  $E$  по величине и направлено под углом  $\alpha$  к нормали поверхностей пластины; внутри первой пластины величина электрического поля будет

равна  $E \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon_1^2 \tan^2 \alpha}}}$  и направлено оно будет под углом  $\beta$  к нормали

поверхностей пластины, где  $\beta$  определяется следующим соотношением  $\tan \beta = \varepsilon_1 \tan \alpha$ ; внутри второй пластины величина электрического поля

будет равна  $E \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon_2^2 \tan^2 \alpha}}}$  и направлено оно будет под углом  $\gamma$  к нор-

мали поверхностей пластины, где  $\gamma$  определяется следующим соотноше-  
нием  $\tan \gamma = \varepsilon_2 \tan \alpha$ ; внутри третьей пластины величина электрического

поля будет равна  $E \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon_3^2 \tan^2 \alpha}}}$  и направлено оно будет под

углом  $\delta$  к нормали поверхностей пластины, где  $\delta$  определяется следую-  
щим соотношением  $\tan \delta = \varepsilon_3 \tan \alpha$ .

7) В статическое электрическое поле  $E$  перпендикулярно полю помещена бесконечная проводящая толстая пластина с толщиной  $h$ . Найти электрическое поле везде. Найти площадную плотность зарядов, сосредоточенных на границах пластины (см. рис. 3.11).

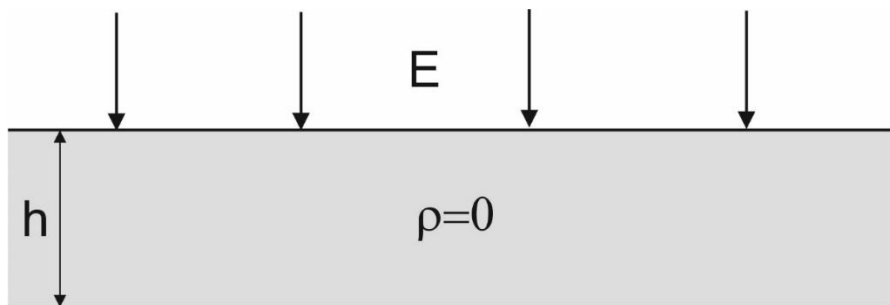


Рис. 3.11

*Решение:*

Известно, что если проводник поместить в электрическое поле, то в нем на границах проводника накапливается электрический заряд, который нейтрализует внешнее электрическое поле, таким образом, чтобы внутри проводника суммарное поле (внешнее поле и поле индуцированных зарядов) равнялось 0 [3, с. 60].

Под воздействием внешнего поля, на верхней границе в тонком слое будет накапливаться заряд. Поскольку в нашей задаче внешнее поле перпендикулярно пластине и пластина бесконечна, то наша система симметрична относительно плоскости середины пластины и любая точка на границе пластины ничем не отличается от другой. Значит поверхностная плотность зарядов в каждой точке тонкого приграничного слоя будет одинакова. Обозначим ее  $\sigma$ .

Поскольку на верхней границе накапливается заряд с плотностью  $\sigma$ , значит на нижней границе будет накапливаться такой же по плотности заряд, но с другим знаком [3, с. 59]. Найдем какой должна быть плотность зарядов  $\sigma$ , чтобы нейтрализовать внешнее поле внутри проводника.

При решении задачи № 15 раздела 2, мы уже находили чему будет равно поле между двух заряженных пластин с различными поверхностными плотностями зарядов. Получили следующий ответ: в верхней области суммарное поле равно  $f_v = 2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)$  направленное вверх; в нижней области поле равно  $f_n = 2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)$  направленное вниз; в области между плоскостями поле равно  $f_c = |2\pi(\sigma_1 - \sigma_2)|$  при этом если  $\sigma_1 > \sigma_2$ , то поле направлено вниз, если  $\sigma_1 < \sigma_2$ , то поле направлено вверх.

Подставим в этот ответ параметры нашей задачи. Плотность зарядов в верхнем тонком слое равна  $\sigma$ , в нижнем  $-\sigma$ . Тогда получим, что сверху пластины электрическое поле от нее будет равно:

$$f_v = 2\pi(\sigma_1 + \sigma_2) = 2\pi(\sigma - \sigma) = 0.$$

Снизу пластины поле от нее будет равно:

$$f_n = 2\pi(\sigma_1 + \sigma_2) = 2\pi(\sigma - \sigma) = 0.$$

То есть снаружи пластины дополнительное поле от тонких заряженных слоев будет отсутствовать. Внутри проводящей пластины величина электрического поля будет равна:

$$f_c = |2\pi(\sigma_1 - \sigma_2)| = 2\pi(\sigma + \sigma) = 4\pi\sigma,$$

и направлено оно будет вниз.

Для того чтобы внутри проводника поле стало нулевым необходимо, чтобы внешнее поле и поле создаваемое тонкими заряженными слоями в проводнике была равно друг другу по величине и противоположно по направлению. Тогда можем записать, что:

$$E = -E_{\text{пл}} \Rightarrow E = -4\pi\sigma \Rightarrow \sigma = -\frac{E}{4\pi}.$$

*Ответ:* выше и ниже пластины электрическое поле будет равно  $E$  по величине и направлено перпендикулярно к нормали поверхностей пластины; внутри проводящей пластины электрическое поле будет равно 0; плотность индуцированных зарядов в верхнем тонком слое проводника будет равна  $-\frac{E}{4\pi}$ ; плотность индуцированных зарядов в нижнем тонком слое проводника будет равна  $\frac{E}{4\pi}$ .



## 4. Магнитное поле постоянного тока

Закон Ампера определяет силовое действие магнитного поля на движущиеся электрические заряды и электрические токи. Приведем этот закон для случая, который определяет силовое действие магнитного поля на направленный (по току) элементарный отрезок  $\vec{dl}$  линейного тока  $I$ :

$$\vec{dF} = I \cdot [\vec{dl} \cdot \vec{B}].$$

Здесь  $\vec{dF}$  – сила (Н),  $I$  – электрический ток (А),  $dl = |\vec{dl}|$  – длина отрезка тока (м),  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции (Тл) в пределах элементарного отрезка  $dl$  (см. рис. 4.1).

Абсолютная величина

$$dF = |\vec{dF}| = I \cdot dl \cdot B \cdot \sin(\vec{dl}, \vec{B}),$$

$$\vec{dF} \parallel [\vec{dl} \cdot \vec{B}], \vec{dF} \perp \vec{dl}, \vec{dF} \perp \vec{B},$$

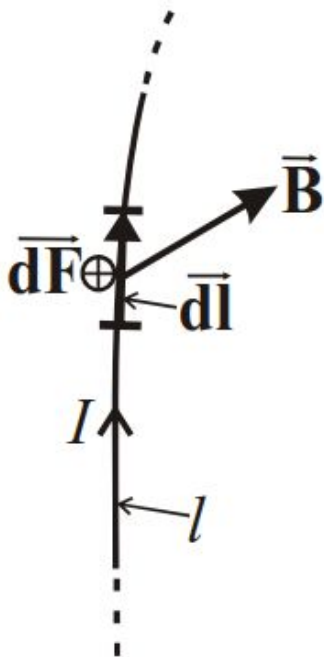


Рис. 4.1

а направления  $\vec{dl}$  тока  $I$ , векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{dF}$  образуют правую тройку.

Закон Био – Савара – Лапласа. Магнитное поле, создаваемое в точке наблюдения  $a$  элементарным отрезком  $dl$  тока  $I$  определяет выражение:

$$\vec{dB}(a) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[\vec{dl} \cdot \vec{L}]}{L^3},$$

где  $\vec{L} = \vec{L}_{qa}$  – радиус-вектор с началом  $q$  в центре отрезка  $dl$  и концом в точке наблюдения  $a$ ,

$L_{qa} = L = |\vec{L}|$  – расстояние между точками  $q$  и  $a$ ,  $\vec{dl}$  – направленный (по току  $I$ ) элементарный отрезок  $dl$ . Тогда, модуль вектора  $\vec{dB}$ :

$$dB(a) = \frac{\mu_0 I \cdot dl}{4\pi L^2} \cdot \sin(\vec{dl}, \vec{L}).$$

Так как  $\frac{\mu_0 I}{4\pi L^2}$  – положительный скаляр, то вектор  $\vec{dB}$  имеет то же направление, что и вектор  $[\vec{dl} \cdot \vec{L}]$ , то есть  $\vec{dB} \perp \vec{dl}$ ,  $\vec{dB} \perp \vec{L}$ , и  $\vec{dl}$ ,  $\vec{L}$ ,  $\vec{dB}$  образуют правую тройку векторов.

Если на рис. 4.2,1 отрезок  $\vec{dl}$  тока  $I$ , точки наблюдения  $a$  и радиусы векторы  $\vec{L}$  лежат в плоскости чертежа, то векторы  $\vec{dB}$  ортогональны этой плоскости. При показанном на рис. 4.2,1 направлении тока  $I$  в лежащей справа от тока  $I$  точке  $a$  вектор  $\vec{dB}$  направлен «от нас», а в расположенной слева от тока точке  $a$  – «к нам».

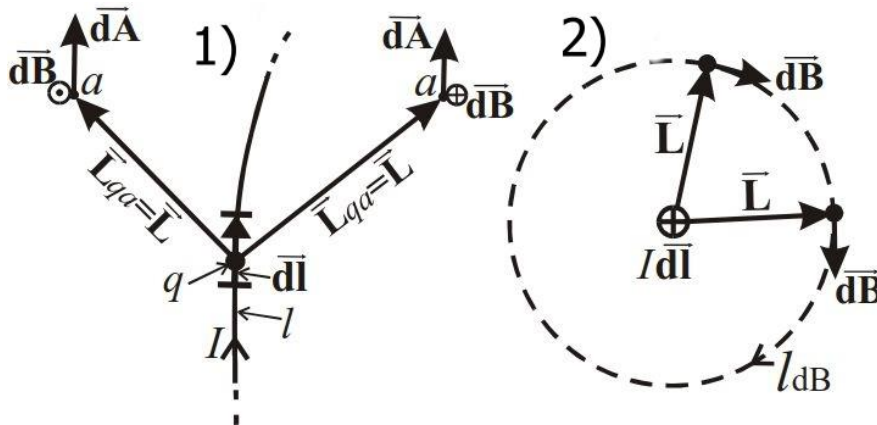


Рис. 4.2

Некоторые геометрические особенности поля  $\vec{dB}$  показаны на рис. 4.2, 2, где отрезок  $\vec{dl}$  тока  $I$  ориентирован ортогонально плоскости чертежа (ток направлен «от нас»), а точки наблюдения лежат в этой плоскости и расположены на одинаковых расстояниях от центра  $q$  отрезка. На рисунке видно, что векторные (силовые) линии  $l_{dB}$  (по касательной к которым направлены векторы  $\vec{dB}$ ) это – окружности. Направление линий  $l_{dB}$  образует правовинтовую систему с направлением тока  $I$  в отрезке  $dl$ .

Магнитное поле  $\vec{B}$ , создаваемое током  $I$  вдоль линии  $l$ , определим, суммируя поля  $\vec{dB}$  всех отрезков  $dl$ , из которых состоит  $l$ :

$$\vec{B} = \int_l \vec{dB}.$$

То есть закон Био – Савара – Лапласа для линейного тока:

$$\vec{B}(a) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{[\vec{dl} \cdot \vec{L}]}{L^3}.$$

При интегрировании, конечно, положение точки наблюдения  $a$  – фиксировано, а точка  $q$  «пробегает» линию  $l$ .

Получим закон Био – Савара – Лапласа для объемного тока. Пусть в области пространства  $V$  имеется объемный ток (см. рис. 4.3). Такой ток характеризует поле вектора плотности тока  $\vec{j}$ . На рис. 4.3 показана элементарная токовая трубка, к поверхности которой по касательной направлены векторы  $\vec{j}$ . Рассмотрим элементарный отрезок такой трубки высотой  $dl$ , ограниченный нормальными (ортогональными  $\vec{j}$ ) сечениями  $dS_H$ .

Электрический ток в этом отрезке  $dI = j \cdot dS_H$  (где  $j = |\vec{j}|$ ) создаёт магнитное поле, определяемое выражением:

$$\vec{dB}(a) = \frac{\mu_0 dI}{4\pi} \frac{[\vec{dl} \cdot \vec{L}]}{L^3} = \frac{\mu_0 j \cdot dS_H}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{dl} \cdot \vec{L}]}{L^3}.$$

Принимая во внимание, что в токовой трубке  $\vec{j} \parallel \vec{dl}$  и, следовательно,  $j \cdot \vec{dl} = dl \cdot \vec{j}$ , а  $dS_H \cdot dl = dV$  – объем отрезка  $dl$  элементарной токовой трубки сечением  $dS_H$ , получаем:

$$\vec{dB}(a) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j} \cdot \vec{L}]}{L^3} dV.$$

Так как

$$\vec{B} = \int_l \vec{dB},$$

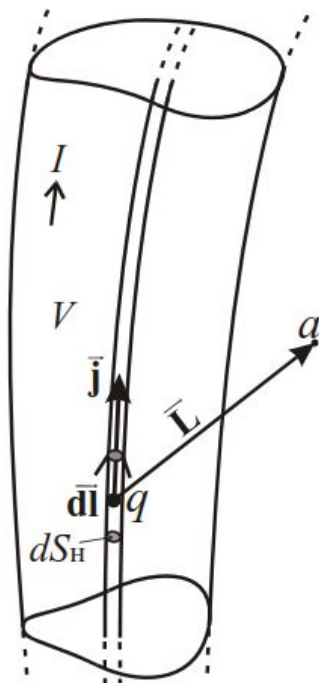


Рис. 4.3

для магнитного поля объёмного тока, занимающего область пространства  $V$ , получаем следующее выражение:

$$\vec{B}(a) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{j} \cdot \vec{L}]}{L^3} dV,$$

где  $\vec{L} = \overrightarrow{L_{qa}}$ , а при интегрировании точка  $q$  «пробегаёт» область  $V$ . Это закон Био – Савара – Лапласа для объёмного тока.

Магнитное поле  $\vec{B}$  – соленоидальное (чисто вихревое). Его векторные линии замкнуты, либо продолжаются до бесконечности. Возбудителями (вихревого типа) поля  $\vec{B}$  в немагнитной среде являются электрические токи в проводниках, распределение которых характеризует вектор плотности тока  $\vec{j}$ .

Обозначив

$$I_s = \int_S (\vec{j} \cdot \vec{dS}),$$

получаем 1-е уравнение магнитного поля постоянного тока в интегральной форме, называемое законом полного тока (см. рис. 4.4):

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot \vec{dl}) = \mu_0 I_s = \mu_0 \int_S (\vec{j} \cdot \vec{dS}).$$

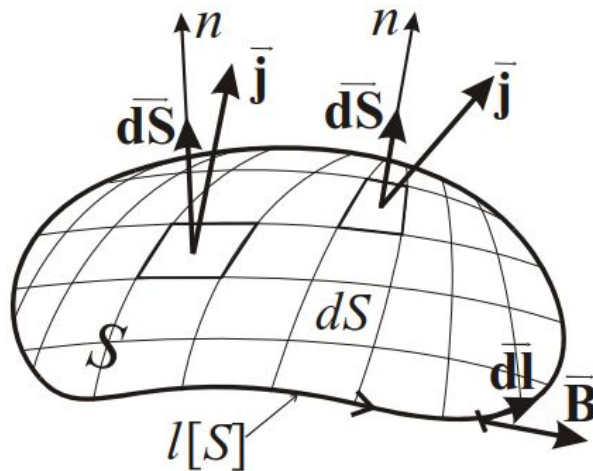


Рис. 4.4

Следует отметить, что закон Био – Савара – Лапласа для линейных и объёмных токов может применяться для расчета магнитного поля отдельных участков цепей постоянного электрического тока. В отличие от этого, закон полного тока, справедлив только для полных цепей постоянного тока – замкнутых или тех, которые можно считать «продолжающимися до бесконечности».

Отметим также, что поток  $I_S$  вектора  $\vec{j}$  через поверхность тесно связан электрическим током  $I$  через поверхность  $S$ . В частности, если на всей поверхности  $S$  углы между направлениями  $\vec{j}$  и  $d\vec{S}$  – острые (см. рис. 4.4) или нулевые, то  $I_S = I$ . Если же эти углы – тупые (или равны  $\pi$ ), то  $I_S = -I$ .

Также можно получить 2-е уравнение магнитного поля постоянного тока в интегральной форме:

$$\oint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = 0,$$

то есть поток вектора  $\vec{B}$  через любую замкнутую поверхность  $S$  равен нулю.

Установим связь между напряженностью магнитного поля  $\vec{H}$  и вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ . Как было показано раньше,

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{j}).$$

Вектор намагниченности

$$\vec{j} = \vec{j}^{\text{вп}} + \vec{j}^0,$$

где слагаемое  $\vec{j}^{\text{вп}}$  отвечает временной (индуктивной) намагниченности, существующей под действием магнитного поля, а слагаемое  $\vec{j}^0$  – постоянной (остаточной) намагниченности, которая существует независимо от действующего магнитного поля. Примем, как и для магнитостатического поля, допущение о прямой пропорциональной зависимости между  $\vec{j}^{\text{вп}}$  и  $\vec{H}$ , то есть будем полагать, что  $\vec{j}^{\text{вп}} = \alpha\vec{H}$ , где  $\alpha$  – магнитная восприимчивость. Тогда,

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \alpha\vec{H} + \vec{j}^0).$$

Магнитная проницаемость  $\mu = 1 + \alpha$ , то есть остаётся справедливым уравнение связи, полученное ранее для магнитоэлектростатического поля:

$$\vec{B} = \mu_0 (\mu \vec{H} + \vec{J}^0) = \mu_a \vec{H} + \mu_0 \vec{J}^0,$$

где  $\mu_a = \mu_0 \mu$  – абсолютная магнитная проницаемость.

В присутствии магнитной среды систему уравнений магнитного поля постоянного тока в дифференциальной форме удобно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} I. \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}, \\ II. \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \vec{B} &= \mu_a \vec{H} + \mu_0 \vec{J}^0. \end{aligned}$$

В присутствии намагничивающейся среды уравнения магнитного поля постоянного электрического тока в интегральной форме удобно представить в виде:

$$\begin{aligned} I. \oint_{l[S]} (\vec{H} \cdot d\vec{l}) &= I_S = \int_S (\vec{j} \cdot d\vec{S}), \\ II. \oint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}) &= 0, \\ \vec{B} &= \mu_a \vec{H} + \mu_0 \vec{J}^0. \end{aligned}$$

Первое из уравнений – это одна из форм записи закона полного тока.

Пусть всюду (во всём пространстве)  $\operatorname{grad} \mu = 0, \vec{J}^0 = 0$ , то есть это – модель безграничной, однородной по магнитной проницаемости  $\mu$  среды, в которой нет постоянной намагниченности, но может быть временная намагниченность, существующая под действием магнитного поля. Из уравнения связи получаем:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

где  $\mu = \text{const}$ . Умножая левую и правую части 1-го уравнения в дифференциальной форме на произведение  $\mu_0 \mu$ , получаем

$$\mu_0 \mu \operatorname{rot} \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{j}$$

или (при  $\mu = \text{const}$  и  $\mu_0 \mu \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{rot} (\mu_0 \mu \vec{H})$ ):

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{j}.$$

Сравним это уравнение с равенством для магнитного поля постоянного тока в вакууме (или в немагнитной среде). Левая часть этого уравнения – та же, а правая часть отличается множителем  $\mu$ . Это означает, что при заданном распределении токов в безграничной, однородной по  $\mu$  модели среды поле  $\vec{B}$  будет отличаться по абсолютной величине от поля в вакууме в  $\mu$  раз. Тогда, например, для безграничной, однородной по  $\mu$  среды получаем:

$$\begin{aligned} \overline{d\vec{B}} &= \frac{\mu \cdot \mu_0 I}{4\pi} \frac{[\overline{d\vec{l}} \cdot \vec{L}]}{L^3} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \cdot \frac{[\overline{d\vec{l}} \cdot \vec{L}]}{L^3}, \\ \overline{d\vec{H}} &= \frac{\overline{d\vec{B}}}{\mu \cdot \mu_0} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{[\overline{d\vec{l}} \cdot \vec{L}]}{L^3}. \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что при  $\vec{j}^0 = 0$  в безграничной однородной по магнитной проницаемости  $\mu$  модели среды напряженность  $\vec{H}$  магнитного поля, возбуждаемого постоянным электрическим током, не зависит от  $\mu$ .

## Задачи

1) По очень тонкой бесконечной проволоке, вытянутой вдоль прямой, течет ток  $I$ . Найти магнитное поле везде (см. рис. 4.5).

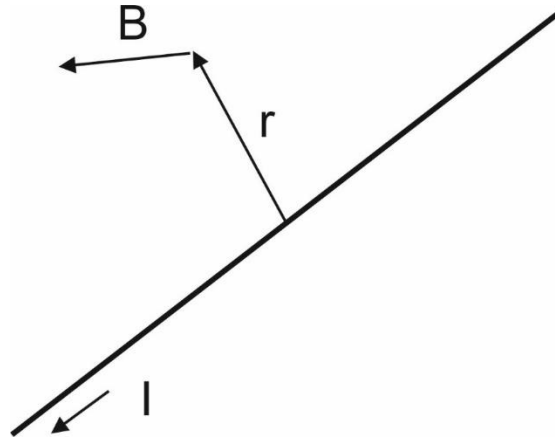


Рис. 4.5

*Решение:*

Для решения этой задачи воспользуемся выражением для полного тока [3, с. 114].

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \mu_0 I_s = \mu_0 \int_S (\vec{j}_s \cdot d\vec{S}),$$

где  $B$  – магнитное поле, создаваемое проводниками с током,  $d\vec{l}$  – вектор вдоль пути, по которому считаем циркуляцию магнитного поля (можем выбрать любой замкнутый путь),  $I_s$  – линейный ток, протекающий через поверхность  $S$ , натянутую на путь  $l$ ,  $j_s$  – объемный ток, протекающий через поверхность  $S$ , натянутую на путь  $l$ ,  $j_L$  – поверхностный ток, протекающий через поверхность  $S$ , натянутую на путь  $l$ .

Для удобного решения задачи нахождение поля через вычисление циркуляции вдоль некоторого пути, необходимо правильно выбрать путь, вдоль которого будет удобно считать скалярное произведение. В данной задаче мы имеем цилиндрическую симметрию, то есть имеется одна выделенная ось (вдоль тонкой бесконечной нити) вокруг которой



все направления одинаковы. Соответственно, при таком типе симметрии удобнее всего выбирать путь в виде окружности, плоскость которой перпендикулярна проводу, и центр ее совпадает с положением провода с током (см. рис. 2.29).

Найдем направление магнитного поля на этой окружности. По закону Био – Савара – Лапласа для проводника с током, элемент которого создает в некоторой точке индукцию  $dB$ , записывается в виде [3, с. 110]:

$$\vec{B}(\vec{a}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{[\vec{dl} \cdot \vec{L}]}{L^3}$$

Направление  $dB$  перпендикулярно  $Idl$  и  $r$ , т. е. перпендикулярно плоскости, в которой они лежат, и совпадает с касательной к силовой линии магнитной индукции. Все векторы  $dB$  от произвольных элементарных участков  $dl$  имеют одинаковое направление. Поэтому сложение векторов можно заменить сложением модулей (см. рис. 4.6).

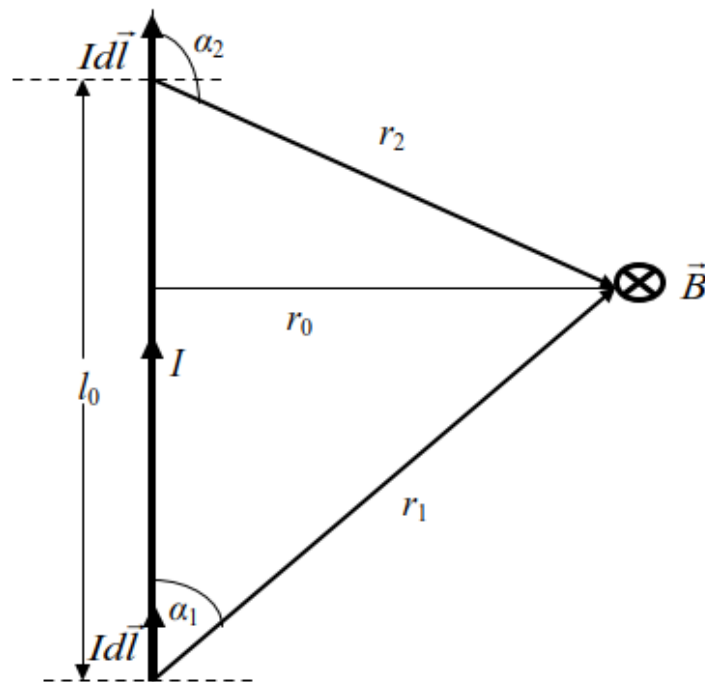


Рис. 4.6

Как мы выяснили выше, направление поля от всего провода совпадает с направлением от одного элементарного кусочка, найдем это направление, используя выражение для векторного произведения и правило «буравчика» [3, с. 109].

Получим, что в нашей задаче, где ток течет на нас, магнитное поле на окружности направлено против часовой стрелки (см. рис. 4.7).

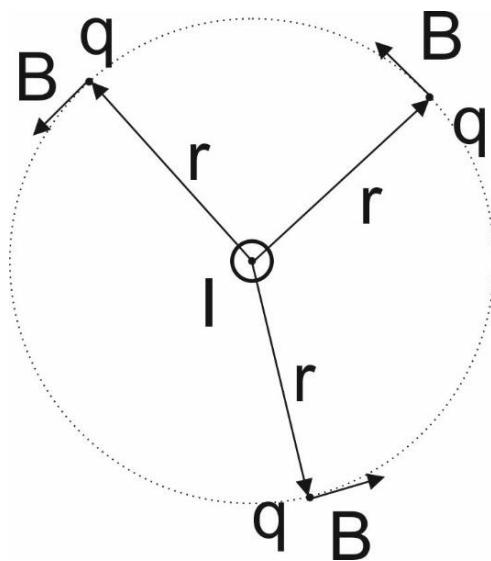


Рис. 4.7

Определим теперь величину магнитного поля на этой окружности. Поскольку в нашей задаче есть цилиндрическая симметрия, то точки на окружности, центр которой совпадает с положением провода с током, будут равнозначны и симметричны. Значит и величины полей в этих точках на окружности должны быть одинаковы.

Это можно доказать, выполнив следующие рассуждения. Допустим на окружности есть две точки А и В, и в этих точках поле отличается. Тогда проведем следующие рассуждения: наблюдатель смотрит на нашу систему и видит, что в точке А поле равно величине  $f_a$  (см. рис. 4.8, 1). Теперь представьте, что наблюдатель закрыл глаза и его переместили так, что для него точка В теперь совпала с точкой А (см. рис. 4.8, 2) и открыв глаза он увидит, что поле в точке изменилось с  $f_a$  на  $f_b$ , но никаких других изменений кроме этого нет (см. рис. 4.8, 3). Провод с током, как был по оси системы, так и остался, никаких новых объектов не появилось, пространство как было изотропным, так и осталось. То есть для наблюдателя ничего не изменилось, кроме величины поля, что невозможно. Таким образом, получается противоречие: поле не должно меняться, но оно поменялось.

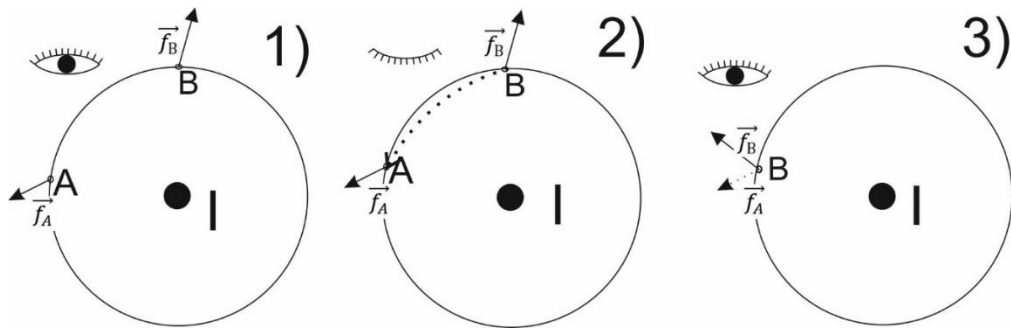


Рис. 4.8

Отсюда следует вывод, что поля  $f_a$  и  $f_b$  равны, а это возможно только в том случае, если в любой точке на окружности величины полей будут равны. Применяв похожие рассуждения, можно показать, что, перемещая окружность вдоль длины провода, ничего меняться не будет и поле на таких окружностях тоже одинаково по величине и направлению.

Итак, мы определили, что в любой точке на окружностях с одинаковым радиусом, плоскость которых перпендикулярна проводу с током и центр их совпадает с положением провода, величина магнитного поля будет одинакова и направлено оно будет против часовой стрелки. То есть величина и направление поля может зависеть только от радиуса таких окружностей.

Теперь можно выписать выражение для полного тока. Выберем замкнутый путь, по которому будем считать циркуляцию вдоль окружности с радиусом  $r$  против часовой стрелки, тогда угол между векторами  $B$  и  $dl$  будет равен  $0$  и скалярное произведение будет равно просто произведению величин:

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot \vec{dl}) = \{ \vec{B} | | \vec{dl} \} = \int_{l[S]} B \cdot dl = B \int_{l[S]} dl = B \int_0^{2\pi r} dl = B 2\pi r.$$

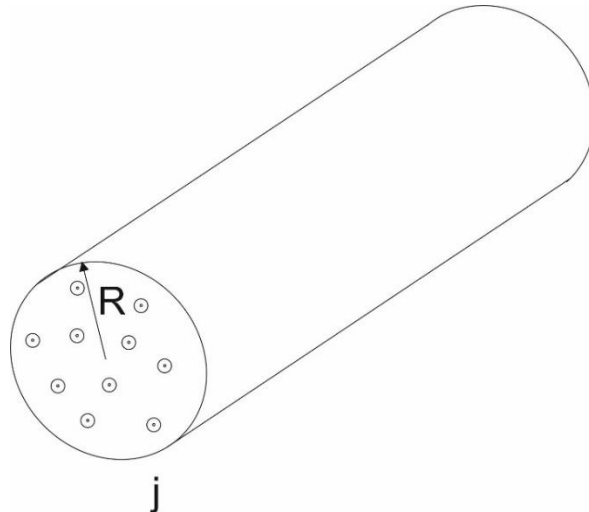
В правой части уравнения полного тока стоит полный ток, протекающий через площадь, натянутую на путь  $l$ . В нашем случае это линейный ток и равен он  $I$ . Тогда:

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot \vec{dl}) = \mu_0 I_s \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Меняя радиус окружностей, вдоль которых считаем циркуляцию, и перемещая их вдоль провода с током, можно определить поле в любой точке пространства.

*Ответ:* величина магнитного поля в любой точке равна  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  направление магнитного поля будет против часовой стрелки вдоль окружности, плоскость которой перпендикулярна проводу с током и центр совпадает с проводом (ток течет на нас).

2) Вдоль бесконечной толстой проволоки радиусом  $R$ , вытянутой вдоль прямой, течет ток с равномерной объемной плотностью  $j$ . Найти магнитное поле везде (см. рис. 4.9).



**Рис. 4.9**

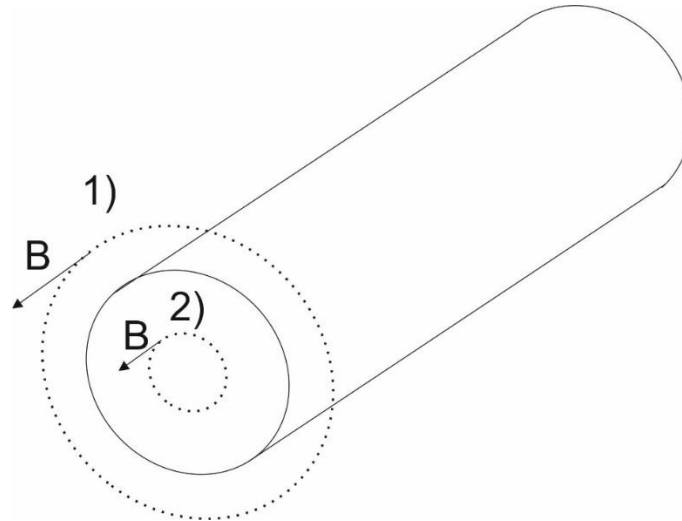
*Решение:*

Для решения этой задачи воспользуемся выражением для полного тока [3, с. 114]:

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \mu_0 \int_S (\vec{j}_s \cdot d\vec{S}).$$

Проведя такие же рассуждения, как в предыдущей задаче, можно показать, что магнитное поле одинаково по величине на окружностях

одинакового радиуса, как внутри толстого провода (область 2), так и снаружи него (область 1). Направление поля вдоль окружности и против часовой стрелки, если ток течет на нас (см. рис. 4.10).



*Рис. 4.10*

Найдем магнитное поле используя выражение для полного тока отдельно для области внутри провода (область 2) и снаружи провода (область 1).

Левая часть уравнения полного тока в области 1, то есть снаружи провода, будет такое:

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot \vec{dl}) = \{\vec{B} || \vec{dl}\} = \int_{l[S]} B \cdot dl = B \int_{l[S]} dl = B \cdot 2\pi r.$$

Правая часть в области 1, учитывая, что направления тока и направление нормали поверхности, через которую считаем поток плотности тока, будет равны, получим:

$$\mu_0 \int_S (\vec{j}_s \cdot \vec{dS}) = \mu_0 \int_S j_s \cdot dS = \mu_0 j \int_S dS = \mu_0 j \cdot \pi R^2.$$

Плотность тока можно вынести из-под интеграла, так как она равномерна по всей площади, где течет ток, сама же площадь, где течет ток, равна площади поперечного сечения провода  $\pi R^2$ .

Приравняем правую и левую часть:

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot \vec{dl}) = \mu_0 \int_S (\vec{j}_s \cdot \vec{dS}) \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 j \cdot \pi R^2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}.$$

Направление поля снаружи будет против часовой стрелки вдоль окружности.

Найдем поле для области 2, то есть внутри толстого провода. Правая часть будет равна:

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot \vec{dl}) = \{B \parallel dl\} = \int_{l[S]} B \cdot dl = B \int_{l[S]} dl = B \cdot 2\pi r.$$

Левая часть будет равна:

$$\mu_0 \int_S (\vec{j}_s \cdot \vec{dS}) = \mu_0 \int_S j_s \cdot dS = \mu_0 j \int_S dS = \mu_0 j \cdot \pi r^2.$$

Левая часть будет отличаться, потому, что площадь поверхности будет меньше чем в области 1, поскольку радиус окружности, на которую мы натягиваем поверхность меньше R.

Приравняем левую и правую части:

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot \vec{dl}) = \mu_0 \int_S (\vec{j}_s \cdot \vec{dS}) \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 j \cdot \pi r^2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 j r}{2}.$$

Направление поля внутри будет против часовой стрелки вдоль окружности.

Проанализируем график магнитного поля в зависимости от расстояния от центра провода (см. рис. 4.11).

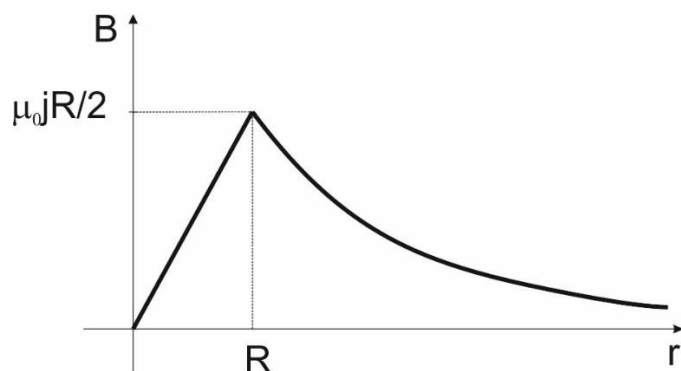


Рис. 4.11

По графику видно, что начиная от радиуса 0 до радиуса  $R$  поле линейно возрастает до величины  $\frac{\mu_0 j R}{2}$ , после чего начинает спадать по гиперболе степени 1 и на бесконечности стремится к 0.

*Ответ:* величина магнитного поля в любой точке снаружи толстого провода ( $r > R$ ) равна  $B = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}$ , направление магнитного поля будет против часовой стрелки вдоль окружности; величина магнитного поля в любой точке внутри толстого провода ( $r < R$ ) равна  $B = \frac{\mu_0 j r}{2}$ , направление магнитного поля будет против часовой стрелки вдоль окружности. Ток течет на нас.

3) Вдоль бесконечной толстостенной трубы, вытянутой вдоль одной прямой, течет ток с поверхностной плотностью  $j$ . Внутренний радиус трубы  $R_1$ , внешний радиус  $R_2$ . Найти магнитное поле везде (см. рис. 4.12).

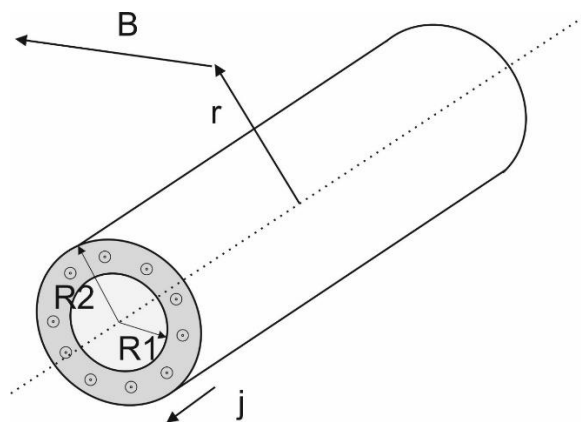


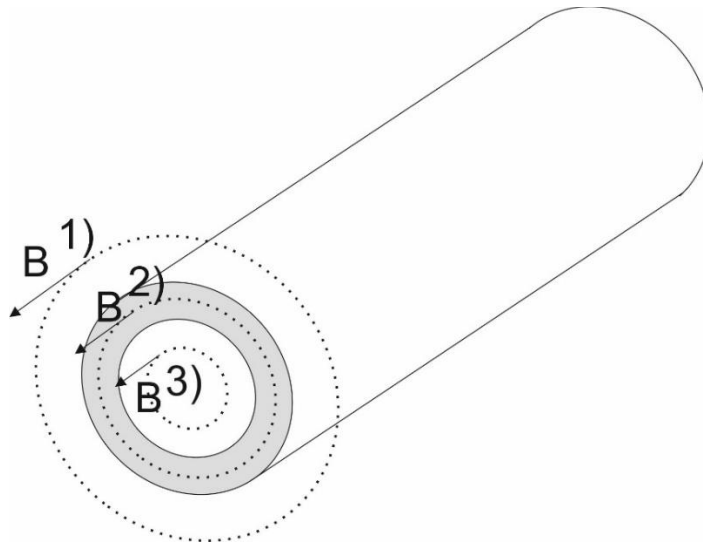
Рис. 4.12

*Решение:*

Проведя такие же рассуждения, как в задаче № 1 этого раздела, можно показать, что магнитное поле одинаково по величине на окружностях одинакового радиуса, как внутри полости (область 3), как внутри толстостенной трубы (область 2), так и снаружи нее (область 1). Направление поля вдоль окружности и против часовой стрелки, если ток течет на нас (см. рис. 4.13).

Напишем выражения для полного тока в каждой из областей, чтобы найти величину магнитного поля. В области 1 получим:

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \mu_0 \int_S (\vec{J}_s \cdot d\vec{S}) \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 j \cdot (S_2 - S_1) \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 j \cdot (\pi R_2^2 - \pi R_1^2) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 j \cdot (R_2^2 - R_1^2)}{2r}$$



*Рис. 4.13*

Площадь, через которую течет ток, равна разности площадей окружностей с радиусом  $R_2$  и  $R_1$ .

В области 3 получим:

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \mu_0 \int_S (\vec{J}_s \cdot d\vec{S}) \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 j \cdot S \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 j \cdot 0 \Rightarrow B = 0.$$



В области 2 получим:

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \mu_0 \int_S (\vec{j}_s \cdot d\vec{S}) \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 j \cdot (S - S_1) \Rightarrow B \cdot 2\pi r = \mu_0 j \cdot (\pi r^2 - \pi R_1^2) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 j \cdot (\pi r^2 - R_1^2)}{2r}.$$

Направления полей во всех трех областях против часовой стрелки вдоль окружностей, перпендикулярных толстостенной трубе, если ток течет на нас.

Нарисуем график величины поля в зависимости от радиуса от центра толстостенной трубы и проанализируем его (см. рис. 4.14).

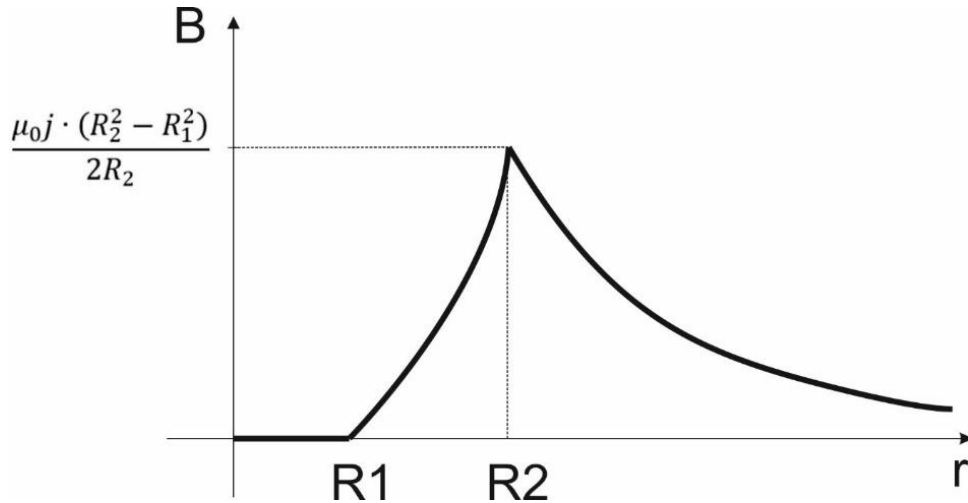


Рис. 4.14

По графику поля видно, что внутри полости у нас поле равно 0. Далее величина поля начинает расти от радиуса  $R_1$  до радиуса  $R_2$  (аналогия с задачей № 8 с шаром из раздела Статические поля), но уже не линейно. После выхода радиуса за пределы полости мы получаем гиперболический спад со степенью 1, что схоже с полем от тонкого бесконечного провода, где на бесконечном удалении мы имеем поле, стремящееся к 0.

*Ответ:* если  $r < R_1$ , то величина поля равна 0; если  $R_2 > r > R_1$ , то величина поля равна  $\frac{\mu_0 j \cdot (\pi r^2 - R_1^2)}{2r}$ ; если  $r > R_2$ , то величина поля равна  $\frac{\mu_0 j \cdot (R_2^2 - R_1^2)}{2r}$ ; направления полей магнитного поля везде будет против часовой стрелки вдоль окружностей. Ток течет на нас.

4) Есть бесконечная плоскость. По ней вдоль одного направления течет ток с линейной плотностью  $j$ . Найти магнитное поле везде (см. рис. 4.15).

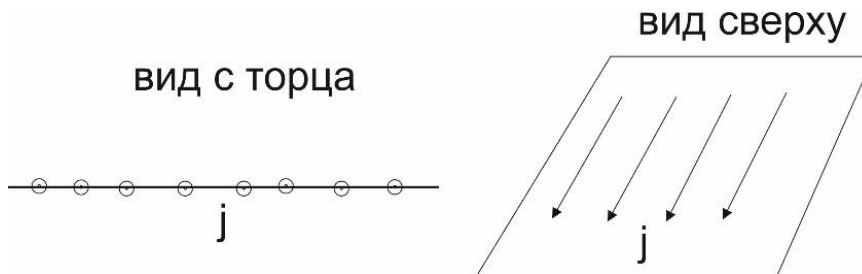


Рис. 4.15

*Решение:*

Искать магнитное поле будем через выражение полного тока, но для удобства расчетов необходимо выбрать путь, вдоль которого будем считать циркуляцию, так, чтобы упростить интеграл от скалярного произведения вектора магнитного поля и вектора направленного вдоль пути.

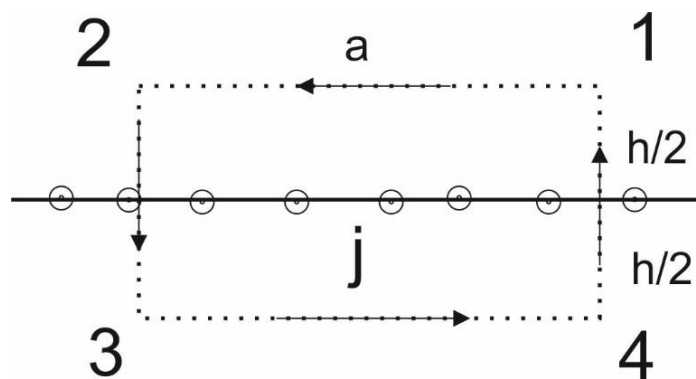


Рис. 4.16

Симметрия задачи плоскостная, относительно плоскости в которой течет ток. То есть нам удобно выбрать в качестве пути прямоугольник, расположенный симметрично относительно плоскости с током (см. рис. 4.16). Найдем направление магнитного поля на каждой из сторон такого пути.

Если ток в плоскости течет на нас, рассмотрим сумму полей от 3 бесконечно тонких линий с током (см. рис. 4.17). Причем линии с индексом 1 и 2 расположены симметрично относительно линии с индексом 0.

Тогда поле от линии  $l_0$  в точке над ней будет направлено влево по правилу буравчика. Поля от линий 1 и 2 имеют вертикальные и горизонтальные составляющие поля, но поскольку эти линии расположены симметрично от линии 0, то вертикальные составляющие будут одинаковы и направлены в противоположные стороны. Таким образом, можно просуммировать все линии тока на плоскости и получим только горизонтальные составляющие. То есть в любой точке сверху плоскости поле направлено влево.

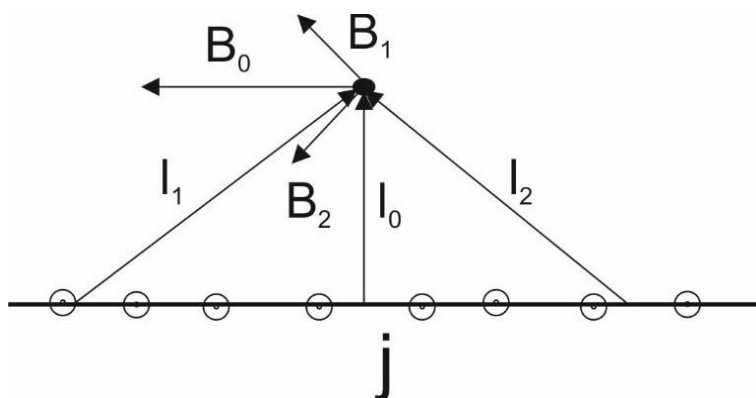


Рис. 4.17

Поскольку нас есть плоскостная симметрия, то можно сказать, что величина поля на одном и том же расстоянии от плоскости должна быть одинакова. Это также можно показать, проведя рассуждения, подобные рассуждениям, приведенным в задаче № 1 этого раздела.

Если будем искать направление поля в нижнем полупространстве в точке симметричной той, что показана на рис. 4.17 и проведя такие же рассуждения для нее, то увидим, что суммарное поле от плоскости направлено вправо и величина его равна величине поля в верхней точке, поскольку эти точки симметричны относительно плоскости с током.

В итоге определили, что в верхнем полупространстве магнитное поле направлено влево и на одинаковом расстоянии от плоскости с током одинаково, в нижнем полупространстве на таком же расстоянии магнитное поле такое же, но направление его уже будет направо.

Теперь можно выписывать выражения для полного тока вдоль прямоугольной линии, которая симметрична относительно плоскости с поверхностным током:

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \mu_0 \int_S (\vec{J}_s \cdot d\vec{S}).$$

Найдем сначала левую часть. Она будет суммой 4-х частей, вдоль отрезков 1–2, 2–3, 3–4, 4–1.

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \int_1^2 (\vec{B} \cdot d\vec{l}) + \int_2^3 (\vec{B} \cdot d\vec{l}) + \int_3^4 (\vec{B} \cdot d\vec{l}) + \int_4^1 (\vec{B} \cdot d\vec{l}).$$

На каждом из участков раскроем скалярное произведение, учитывая куда направлено поле и куда направлено направление обхода. Получим, что на участке 1–2 и 3–4 эти векторы параллельны и направлены в одну сторону, то есть скалярное произведение равно просто произведению величин. На участках 2–3 и 4–1 поле перпендикулярно направлению обхода поэтому скалярное произведение от перпендикулярных векторов будет равно 0.

$$\begin{aligned} \int_1^2 (\vec{B} \cdot d\vec{l}) + \int_2^3 (\vec{B} \cdot d\vec{l}) + \int_3^4 (\vec{B} \cdot d\vec{l}) + \int_4^1 (\vec{B} \cdot d\vec{l}) &= \int_1^2 B \cdot dl + 0 \\ &+ \int_3^4 B \cdot dl + 0 = B \int_1^2 dl + B \int_3^4 dl = B \cdot a + B \cdot a = 2Ba. \end{aligned}$$

Найдем правую часть выражения для полного тока, учитывая, что в этом выражении стоит полный ток, который протекает через площадь  $S$ :

$$\mu_0 \int_S (\vec{J}_s \cdot d\vec{S}) = \mu_0 j \cdot a.$$

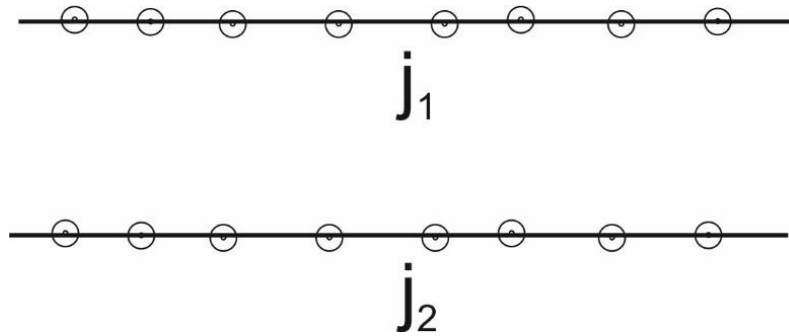
Приравняем правую и левую часть:

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \mu_0 \int_S (\vec{J}_s \cdot d\vec{S}) \Rightarrow 2Ba = \mu_0 j \cdot a \Rightarrow B = \frac{\mu_0 j}{2}.$$

Получено выражение для магнитного поля, которое не зависит от расстояния до плоскости, то есть в полупространствах сверху и снизу поля одинаковы.

*Ответ:* величина поля во всем пространстве равна  $\frac{\mu_0 j}{2}$ ; направление магнитного поля сверху плоскости с током влево, направление поля снизу плоскости с током вправо. Ток течет на нас.

5) Есть две параллельных бесконечных плоскости. По ним вдоль одного и того же направления течет ток с линейными плотностями  $j_1$  и  $j_2$ , соответственно. Найти магнитное поле везде (см. рис. 4.18).



*Рис. 4.18*

*Решение:*

Если магнитное поле возбуждается несколькими источниками, то оно обладает свойством аддитивности, то есть суммарное магнитное поле равно сумме полей, возбужденных каждым источником по отдельности.

Воспользуемся ответом предыдущей задачи. В ней мы нашли поле от одной бесконечно плоскости с током и ответ был такой: величина поля во всем пространстве равна  $\frac{\mu_0 j}{2}$ ; направление магнитного поля сверху плоскости с током влево, направление поля снизу плоскости с током вправо. Ток течет на нас.

Для нахождения ответа нам необходимо просто сложить поля от двух плоских токов.

От первой плоскости с током поле будет равно по величине  $\frac{\mu_0 j_1}{2}$ , и направлено оно будет влево выше первой плоскости и вправо ниже пер-

вой плоскости. От второй плоскости с током поле будет равно по величине  $\frac{\mu_0 j_2}{2}$ , направлено оно будет влево выше второй плоскости и вправо ниже второй плоскости (см. рис. 4.19).

Для того, чтобы найти суммарное поле нам необходимо в каждой части пространства сложить поля, с учетом их направления. Выше обеих плоскостей поля направлены влево, тогда суммарное поле будет направлено влево и по величине равно:

$$B = \frac{\mu_0 j_1}{2} + \frac{\mu_0 j_2}{2} = \frac{\mu_0 (j_1 + j_2)}{2}.$$

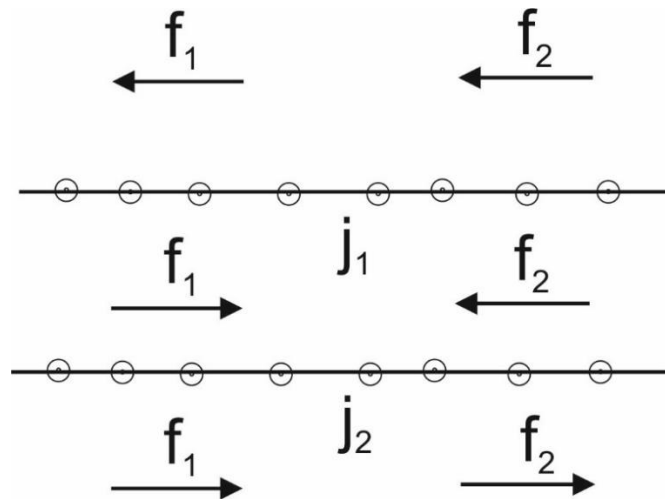


Рис. 4.19

Ниже обеих плоскостей поля направлены влево, тогда суммарное поле будет тогда суммарное поле будет направлено влево и по величине равно:

$$B = \frac{\mu_0 j_1}{2} + \frac{\mu_0 j_2}{2} = \frac{\mu_0 (j_1 + j_2)}{2}.$$

Между плоскостями с током поля направлены в разные стороны, тогда величина суммарного поля будет равна:

$$B = \left| \frac{\mu_0 j_1}{2} - \frac{\mu_0 j_2}{2} \right| = \left| \frac{\mu_0 (j_1 - j_2)}{2} \right|.$$

Направление суммарного поля будет зависеть от соотношения между плотностями токов. Если  $j_1 > j_2$  тогда суммарное поле между пластинами будет направлено вправо, если  $j_1 < j_2$  тогда суммарное поле между пластинами будет направлено влево.

Ответ: величина поля выше первой плоскости равна  $\frac{\mu_0(j_1+j_2)}{2}$  и направлено оно влево; величина поля ниже второй плоскости равна  $\frac{\mu_0(j_1+j_2)}{2}$  и направлено оно вправо; между плоскостями величина поля равна  $\left| \frac{\mu_0(j_1-j_2)}{2} \right|$  направление зависит от соотношения между токами, если  $j_1 > j_2$  тогда магнитное поле между плоскостями будет направлено вправо, если  $j_1 < j_2$  тогда магнитное поле между плоскостями будет направлено влево. Ток течет на нас.

б) Есть бесконечная плоскость толщиной  $h$ . По ней вдоль одного направления течет ток с объемной плотностью  $j$ . Найти магнитное поле везде (см. рис. 4.20).

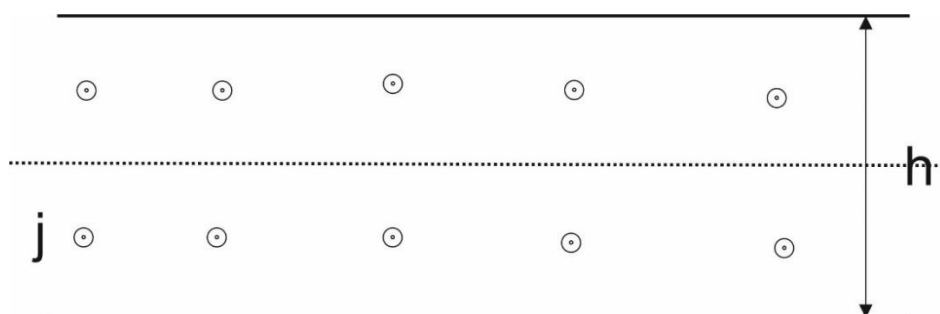


Рис. 4.20

*Решение:*

Если провести рассуждения аналогичные рассуждениям в задаче № 4 этого раздела, то можно показать, что на одном и том же расстоянии от центра пластины величины полей будут одинаковы в силу плоскостной симметрии задачи. Кроме того, можно сказать, что поскольку ток течет на нас, то направление магнитного поля выше середины пластины будет влево, а ниже середины пластины будет вправо.

Решение задачи разбивается на две части: 1) нахождение поля в области 1 (снаружи пластины), 2) нахождение поля в области 2 (внутри пластины) (см. рис. 4.21).

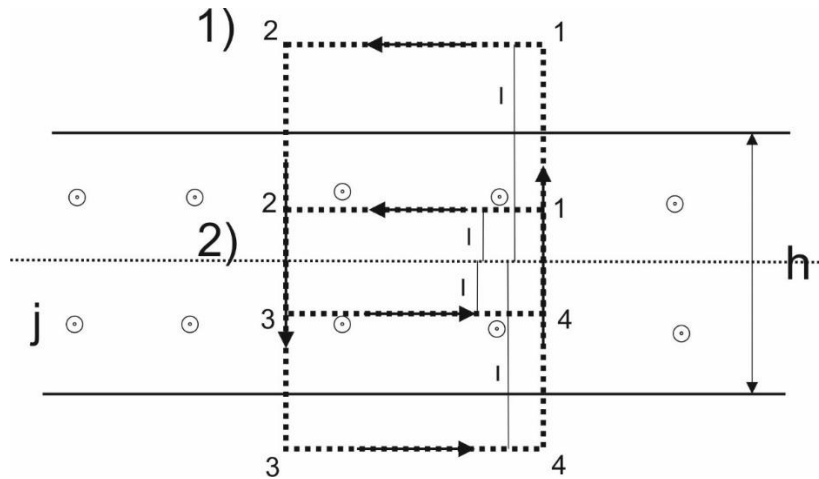


Рис. 4.21

В каждой области будем находить поле, используя выражение для полного тока. Нам нужно выбрать удобный путь, вдоль которого, удобно считать скалярное произведение поля на направление пути. Поскольку у нас в задаче есть плоскостная симметрия, то таким путем будет прямоугольник расположенный симметрично относительно середины пластины, также, как и в задаче № 4 этого раздела. Для каждой из областей путь будет свой – прямоугольник с отличающийся высотой  $l$ , где  $l$  – это удвоенное расстояние от середины пластины до горизонтальной части пути. Длину прямоугольника обозначим как  $a$ .

Как уже доказывалось в задачах выше, магнитное поле выше середины пластины будет направлено влево, а ниже середины пластины вправо, в случае если ток направлен на нас.

Запишем выражение для полного тока для области 1:

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \mu_0 \int_S (\vec{J}_s \cdot d\vec{S}).$$

Найдем сначала левую часть. Она будет суммой 4-х частей, вдоль отрезков 1–2, 2–3, 3–4, 4–1.



$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot \vec{dl}) = \int_1^2 (\vec{B} \cdot \vec{dl}) + \int_2^3 (\vec{B} \cdot \vec{dl}) + \int_3^4 (\vec{B} \cdot \vec{dl}) + \int_4^1 (\vec{B} \cdot \vec{dl}).$$

На каждом из участков раскроем скалярное произведение, учитывая куда направлено поле и куда направлено направление обхода. Получим, что на участке 1–2 и 3–4 эти векторы параллельны и направлены в одну сторону, то есть скалярное произведение равно просто произведению величин. На участках 2–3 и 4–1 поле перпендикулярно направлению обхода, поэтому скалярное произведение от перпендикулярных векторов будет равно 0.

$$\begin{aligned} \int_1^2 (\vec{B} \cdot \vec{dl}) + \int_2^3 (\vec{B} \cdot \vec{dl}) + \int_3^4 (\vec{B} \cdot \vec{dl}) + \int_4^1 (\vec{B} \cdot \vec{dl}) &= \int_1^2 B \cdot dl + 0 \\ &+ \int_3^4 B \cdot dl + 0 = B \int_1^2 dl + B \int_3^4 dl = B \cdot a + B \cdot a = 2Ba \end{aligned}$$

Найдем правую часть выражения для полного тока, учитывая, что в этом выражении стоит полный ток, который протекает через площадь  $S$ , натянутую на путь для области 1:

$$\mu_0 \int_S (\vec{J}_s \cdot \vec{dS}) = \mu_0 j \cdot S = \mu_0 j \cdot ah.$$

Приравняем правую и левую часть:

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot \vec{dl}) = \mu_0 \int_S (\vec{J}_s \cdot \vec{dS}) \Rightarrow 2Ba = \mu_0 j \cdot ah \Rightarrow B = \frac{\mu_0 j h}{2}.$$

Найдем поле для области 2:

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot \vec{dl}) = \mu_0 \int_S (\vec{J}_s \cdot \vec{dS}).$$

Найдем сначала левую часть. Она будет суммой 4-ех частей, вдоль отрезков 1–2, 2–3, 3–4, 4–1.

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \cdot \vec{dl}) = \int_1^2 (\vec{B} \cdot \vec{dl}) + \int_2^3 (\vec{B} \cdot \vec{dl}) + \int_3^4 (\vec{B} \cdot \vec{dl}) + \int_4^1 (\vec{B} \cdot \vec{dl}).$$

На каждом из участков раскроем скалярное произведение, учитывая куда направлено поле и куда направлено направление обхода. Получим, что на участке 1–2 и 3–4 эти векторы параллельны и направлены в одну сторону, то есть скалярное произведение равно просто произведению величин. На участках 2–3 и 4–1 поле перпендикулярно направлению обхода, поэтому скалярное произведение от перпендикулярных векторов будет равно 0.

$$\int_1^2 (\vec{B} \cdot \vec{dl}) + \int_2^3 (\vec{B} \cdot \vec{dl}) + \int_3^4 (\vec{B} \cdot \vec{dl}) + \int_4^1 (\vec{B} \cdot \vec{dl}) = \int_1^2 B \cdot dl + 0 + \int_3^4 B \cdot dl + 0 = B \int_1^2 dl + B \int_3^4 dl = B \cdot a + B \cdot a = 2Ba.$$

Найдем правую часть выражения для полного тока, учитывая, что в этом выражении стоит полный ток, который протекает через площадь  $S$ , натянутую на путь для области 1:

$$\mu_0 \int_S (\vec{J}_s \cdot \vec{dS}) = \mu_0 j \cdot S = \mu_0 j \cdot a \cdot 2l.$$

Приравняем правую и левую часть:

$$\oint_{l[s]} (\vec{B} \cdot \vec{dl}) = \mu_0 \int_S (\vec{J}_s \cdot \vec{dS}) \Rightarrow 2Ba = \mu_0 j \cdot a \cdot 2l \Rightarrow B = \mu_0 j l.$$

Нарисуем график величины поля в зависимости от расстояния от середины пластины (см. рис. 4.22).

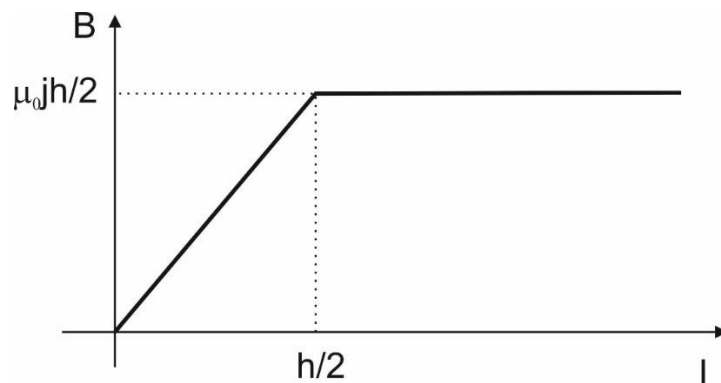


Рис. 4.22

Из графика видно, что на середине пластины величина поля равна 0. Далее с увеличением  $l$  поле возрастает линейно до величины  $\mu_0 j h / 2$ , после чего остается неизменным для любых значений  $l$ . Таким образом, наша толстая плоскость выглядит как бесконечно тонкая, если мы находимся снаружи нее, то есть, величины полей в этих двух случаях одинаковы.

*Ответ:* величина поля выше толстой пластины с током равна  $\frac{\mu_0 j h}{2}$  и направление поля влево; величина поля ниже толстой пластины с током равна  $\frac{\mu_0 j h}{2}$  и направление поля вправо; величина поля внутри пластины равна  $\mu_0 j l$ , где  $l$  – расстояние от середины пластины до точки наблюдения, направление поля внутри пластины влево, если точка, где ищем поле выше середины пластины и направление поля внутри пластины вправо, если точка, где ищем поле ниже середины пластины.

7) Есть две параллельных бесконечных плоскости. По ним в противоположных направлениях течет ток с линейными плотностями  $j_1$  и  $j_2$ , соответственно, причем  $j_1 > j_2$ . Между плоскостями среда с магнитной проницаемостью  $\mu_2$ , в остальной части пространства среда с магнитной проницаемостью  $\mu_1$ . Найти магнитное поле  $H$  везде (см. рис. 4.23).

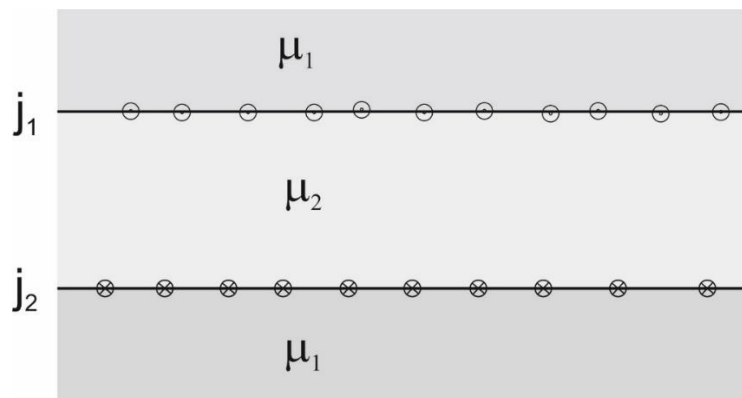


Рис. 4.23

*Решение:*

Задача решается с использованием ответа к задаче № 5 этого раздела. В ней нашли поле  $\vec{B}$  от двух плоскостей с токами, но только токи

были направлены в одну сторону. Поле  $B$  от одной плоскости с током  $j$  равно по величине  $\frac{\mu_0 j}{2}$ . Воспользуемся этим и найдем суммарные поля от двух плоскостей. Для начала необходимо определить направление полей в каждой части пространства (см. рис. 4.24).

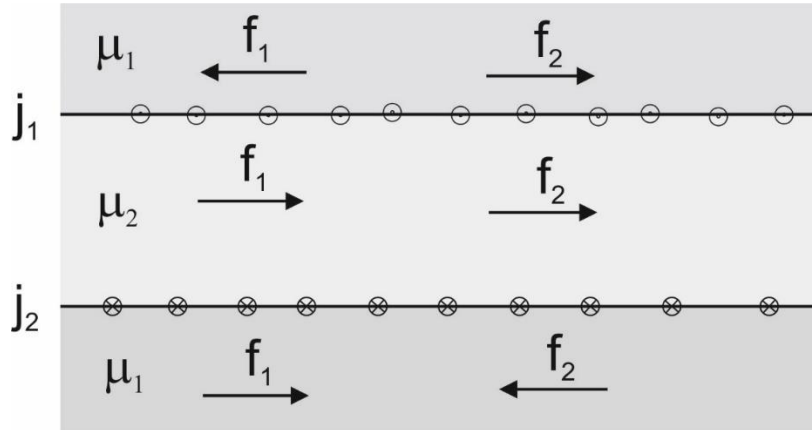


Рис. 4.24

На рис. 4.24 показаны направления полей от каждой плоскости с током с учетом направления тока. Получим, что суммарная величина поля выше верхней плоскости (плоскость с индексом 1) равна:

$$\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 j_1}{2} - \frac{\mu_0 j_2}{2} = \frac{\mu_0 (j_1 - j_2)}{2},$$

здесь учтено, что плотность токов в первой пластине больше, чем во второй. Направление поля выше плоскости 1 будет налево.

Ниже второй плоскости величина поля будет равна:

$$\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 j_1}{2} - \frac{\mu_0 j_2}{2} = \frac{\mu_0 (j_1 - j_2)}{2}.$$

Направление поля ниже плоскости с индексом 2 будет вправо.

Между плоскостями поля направлены в одну сторону, поэтому величина поля будет равна:

$$\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 j_1}{2} + \frac{\mu_0 j_2}{2} = \frac{\mu_0 (j_1 + j_2)}{2}.$$

Направление поля будет вправо.

Для нахождения величин и направлений поля  $H$  в каждой области пространства необходимо вспомнить уравнения связи между полями  $B$  и  $H$  [3, с. 125]:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

В нашей задаче поля  $B$  и  $H$  направлены в одном направлении, поэтому можно выразить поле  $H$  через  $B$  в следующем виде:

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu}.$$

Это равенство справедливо для всего пространства в нашей задаче. Тогда величины полей  $H$  в разных областях выразятся следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{\text{в}} &= \frac{\mu_0(j_1 + j_2)}{2\mu_0\mu} = \frac{j_1 + j_2}{2\mu}, \\ H_{\text{н}} &= \frac{\mu_0(j_1 + j_2)}{2\mu_0\mu} = \frac{j_1 + j_2}{2\mu}, \\ H_{\text{с}} &= \frac{\mu_0(j_1 - j_2)}{2\mu_0\mu} = \frac{j_1 - j_2}{2\mu}. \end{aligned}$$

Направления полей  $H$  будут такие же, как и у полей  $B$ .

*Ответ:* величина поля  $H$  выше верхней пластины с током равна  $\frac{j_1 + j_2}{2\mu}$  и направление поля влево; величина поля  $H$  ниже нижней пластины с током равна  $\frac{j_1 + j_2}{2\mu}$  и направление поля вправо; величина поля  $H$  между пластинами с током равна  $\frac{j_1 - j_2}{2\mu}$  и направление поля вправо.

## Заключение

В учебном пособии освещены решения простых задач по физике, авторы надеются, что это поможет читателю проникнуть в интереснейший мир физики.

Это начало пути, основываясь на своём опыте, для дальнейшего роста советуем несколько книг, которые помогут глубже узнать и понять мир физики.

Для широкого изучения теоретической физики можно прочесть курс «Теоретической физики» Д. В. Сивухина [5]. В нём на высоком уровне подробно и доступно освещены все разделы теоретической физики.

Кроме того, могут оказаться полезны как для приобретения теоретических знаний, так и для решения задач, книги, на основе которых создан курс лекций, читаемых в МГРИ-РГГРУ. Это книги Л. М. Альпина [1; 2].

В книге Н. Е. Савченко [4] приведены задачи с решениями по всем разделам физики, которые решают в физико-математической школе, на физическом факультете НГУ.

Глубокое понимание физики и решение задач невозможно без знания математического аппарата. По мнению авторов, самые лучшие книги по высшей математике, в которых очень полно и доступно приведены основы интегрального и дифференциального исчисления – это книги Г. М. Фихтенгольца [6].

Надеемся, что весь материал издания будет полезен для вас, а знания, которые вы почерпнёте, помогут вам достичь профессиональных высот не только в геофизике, но и в других жизненных аспектах.

## Библиографический список

1. Альпин, Л. М. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике: учебник для вузов / Л. М. Альпин, Д. С. Даев, А. Д. Каринский. – Москва: Недра, 1985. – 407 с.
2. Альпин, Л. М. Практические работы по теории поля / Л. М. Альпин. – Москва: Недра, 1971. – 305 с.
3. Каринский, А. Д. Лекции по «Теории поля» (Теории полей, применяемых в разведочной геофизике): учеб. пособие / А. Д. Каринский. – Москва: Российский государственный геологоразведочный университет (МГРИ-РГГРУ), 2014. – 203 с.
4. Савченко, Н. Е. Задачи по физике с анализом их решения / Н. Е. Савченко. – Москва: Просвещение, 2000. – 320 с.
5. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Электричество: учеб. пособие для вузов / Д. В. Савченко. – в 5 т. Т. 3 / Д. В. Сивухин. – 4-е изд., стер. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 656 с.
6. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов / Г. М. Фихтенгольц. – в 3 т. Т. 1. – Москва: Лань, 2000. – 608 с.

*Учебное издание*

**Потапов Владимир Владимирович**  
**Шеин Александр Николаевич**

**Сборник задач с решениями по курсу**  
**«Теория поля»**

Редактор Л. Н. Вазаева  
Вёрстка И. Н. Аргунова

Подписано в печать 29.12.2018.  
Формат 60×84/16. Бумага офсетная.  
Гарнитура Times New Roman. Способ печати цифровой.  
Усл. печ. л. 7,0. Уч.-изд. л. 7,5. Заказ № 18237.  
Тираж 100 экз. (1-й з-д – 35 экз.).

ФГБОУ ВО «Забайкальский государственный университет»  
672039, г. Чита, ул. Александрo-Заводская, 30