



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

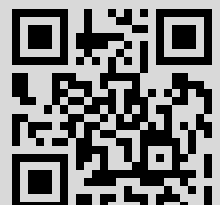
Г. А. Борисов, В. С. Могилатов, Электромагнитное возбуждение цилиндрически-слоистой среды различными источниками, *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2002, том 5, номер 3, 53–66

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 84.237.119.225

13 марта 2017 г., 11:45:54



## ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СЛОИСТОЙ СРЕДЫ РАЗЛИЧНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Г. А. Борисов, В. С. Могилатов

Рассматривается общая постановка задачи об электромагнитном поле в цилиндрически-слоистой кусочно-однородной среде. Основной особенностью является выбор источника в виде произвольного распределения стороннего тока на одной из цилиндрических границ. Решения получены разделением переменных. Интегральные представления решений легко алгоритмизируются. Прикладное значение построенного аппарата определяется его применением в электрическом и электромагнитном каротаже скважин и электромагнитном контроле.

**Введение.** Задачи о возбуждении электрического и электромагнитного полей в цилиндрически-слоистой среде возникают, например (это весьма важный пример), в каротаже, который является одним из основных способов изучения геологического разреза, пройденного скважиной. Цилиндрически-слоистая среда формируется самой скважиной, зонами проникновения бурового раствора, а также, возможно, корпусом каротажного зонда.

Наиболее простые задачи такого сорта давно решены. Например, в работе [1] рассмотрена задача о поле гармонического вертикального магнитного диполя (ВМД) на оси скважины. В дальнейшем делались отдельные частные усложнения этой осесимметричной задачи. В [2] рассматривался источник (ВМД), смещенный с оси скважины, в [3] — горизонтальный магнитный диполь на оси скважины.

Однако методы электрического и электромагнитного каротажа развиваются. Это, с одной стороны, приводит к потребности в новых сложных возбудителях электромагнитного поля, с другой — росту требований к адекватности процедур интерпретации, в частности к более полному учету реальной геометрии источника. Актуальна также проблема двух- и трехмерных подходов. Такие подходы при строгой или приближенной реализации нуждаются в определении функций Грина для произвольных источников.

В предлагаемом обобщении математического аппарата электромагнитного каротажа в качестве источника рассматривается произвольное распределение стороннего тока на одной из цилиндрических границ произвольной одномерной цилиндрически-слоистой среды. Задание источника в таком виде позволяет предусмотреть значительную общность решения задач, связанных с проведением электрического и электромагнитного каротажа. Например, это определение источника позволяет рассмотреть такие разные задачи, как поле горизонтальной петли с током (для задач индукционного каротажа), а также поле вертикальной электрической линии, заземленной на стенке скважины (электрический микрокаротаж).

**1. Постановка задачи.** Будем рассматривать одномерную цилиндрически-слоистую кусочно-однородную геоэлектрическую модель (рис. 1), в которой примем цилиндрическую систему координат. Каждый слой считаем изотропным.

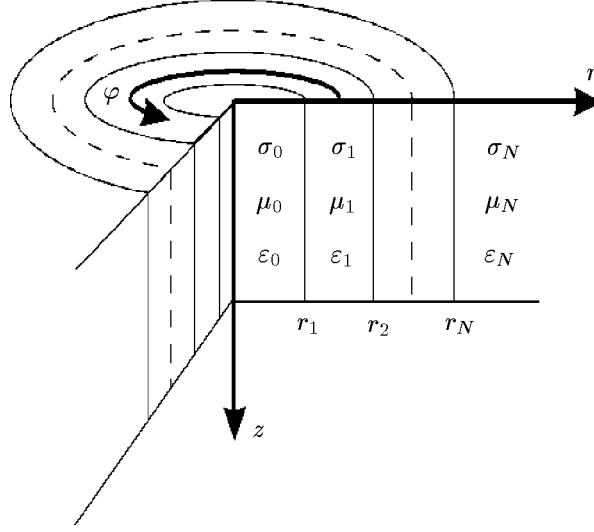


Рис. 1. Модель среды и система координат

Требуется найти выражения для всех компонент электромагнитного поля ( $H_r, H_z, H_\varphi, E_r, E_z, E_\varphi$ ) при условии, что на определенной цилиндрической границе (фактической или фиктивной,  $r = r_l$ ) данного геоэлектрического разреза задано распределение поверхностной плотности стороннего тока (в А/м), меняющегося по гармоническому закону  $\mathbf{J}^{\text{ct}}(\varphi, z)e^{-i\omega t}$ .

Для определения искомых компонент поля требуется решить систему уравнений Максвелла в каждом однородном слое ( $n = 0, 1, \dots, N$ ). Так как электромагнитное поле изменяется во времени гармонически, то данная система уравнений примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \widehat{\sigma}_n \mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= i\omega\mu_n \mathbf{H}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее  $\widehat{\sigma}_n$  — комплексная проводимость  $n$ -го слоя, т. е.  $\widehat{\sigma}_n = \sigma_n - i\omega\epsilon_n$ .

На простых границах ( $r = r_n, n = 1, 2, \dots, N, n \neq l, 1 \leq l \leq N$ ) между слоями непрерывны тангенциальные (вертикальные и угловые) компоненты электромагнитного поля ( $H_z, H_\varphi, E_z, E_\varphi$ ). На границе ( $r = r_l$ ), в которой протекает поверхностный сторонний ток, должны выполняться особые граничные условия. Таким образом, источник в задаче мы учитываем как дополнительные граничные условия. Такой подход был ранее использован для горизонтально-слоистой среды в [4].

Чтобы получить эти граничные условия, рассмотрим цилиндрический слой конечной мощности с простыми граничными условиями (тангенциальные компоненты поля непрерывны), в котором протекает сторонний ток, равномерно распределенный по толщине слоя. Будем задавать его распределением плотности  $\mathbf{j}^{\text{ct}}(\varphi, z)$ . Причем данная плотность имеет только компоненты  $\varphi$  и  $z$ . В этом слое рассмотрим первое уравнение Максвелла (1), которое в цилиндрической системе координат для компоненты  $\varphi$  примет следующий вид:

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \widehat{\sigma}_l E_\varphi + j_\varphi^{\text{ct}}(\varphi, z). \quad (2)$$

Напомним, что на границах данного слоя тангенциальные компоненты электромагнитного поля непрерывны. При достаточно малой мощности слоя можно

аппроксимировать производную по  $r$  конечными разностями,  $\frac{\partial H_z}{\partial r} \approx \frac{\Delta H_z}{\Delta r}$ . Таким образом, уравнение (2) примет следующий вид:

$$\Delta H_z = \Delta r \left( \frac{\partial H_r}{\partial z} - \hat{\sigma}_l E_\varphi \right) - j_\varphi^{\text{ct}}(\varphi, z) \Delta r. \quad (3)$$

Затем устремим мощность слоя ( $\Delta r$ ) к нулю. Тогда в правой части выражения (3), если пренебречь влиянием материального носителя стороннего тока как части геоэлектрической среды, первое слагаемое также устремится к нулю, так как  $\hat{\sigma}_l$  и  $E_\varphi$  конечны. Второе слагаемое стремится к выражению для поверхностной плотности стороннего тока, потому что с уменьшением мощности слоя плотность тока будет возрастать и, таким образом,  $j_\varphi^{\text{ct}}(\varphi, z) \Delta r = J_\varphi^{\text{ct}}(\varphi, z)$ , которая имеет размерность А/м. Отсюда получаем окончательное выражение

$$[H_z]|_{r=r_l} = -J_\varphi^{\text{ct}}(\varphi, z),$$

где  $[F]$  обозначает скачок функции  $F$ , а  $[F]|_{r=r_n}$  — скачок при переходе границы  $r = r_n$ . Аналогичным образом имеем

$$[H_\varphi]|_{r=r_l} = J_z^{\text{ct}}(\varphi, z).$$

Легко заметить, что  $[E_z]|_{r=r_l} = 0$  и  $[E_\varphi]|_{r=r_l} = 0$ . Таким образом, граничные условия на границе  $r = r_l$  примут вид

$$[E_z]|_{r=r_l} = 0, \quad [H_z]|_{r=r_l} = -J_\varphi^{\text{ct}}(\varphi, z), \quad (4)$$

$$[E_\varphi]|_{r=r_l} = 0, \quad [H_\varphi]|_{r=r_l} = J_z^{\text{ct}}(\varphi, z). \quad (5)$$

Для векторов магнитного и электрического полей можно записать отдельные уравнения. В каждом однородном слое  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  должны удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{F} - k_n^2 \mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{F} = \mathbf{H}, \mathbf{E}. \quad (6)$$

Здесь и далее  $k_n^2 = -i\omega\mu_n\hat{\sigma}_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Присоединив сюда условия излучения на бесконечности, мы вполне определили задачу.

Переходя к процессу решения, мы сразу сталкиваемся с необходимостью скаляризации задачи и разделения ее по отдельным проблемам. Известно [4, 5], что в случае одномерной среды задача часто сводится к определению нормальных компонент, через которые выражаются все тангенциальные компоненты поля. В нашем случае

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_r)}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \hat{\sigma}_n E_r, \quad (7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = i\omega\mu_n H_r. \quad (8)$$

Перейдем к постановке задачи для  $E_r$  и  $H_r$ . Подставив выражение оператора Лапласа в цилиндрической системе координат в уравнение (6), получим уравнения для  $E_r$  и  $H_r$ :

$$\Delta F_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2} F_r - k_n^2 F_r = 0, \quad F = H, E. \quad (9)$$

Получим и условия для нормальных компонент электромагнитного поля. Рассмотрим границу  $r = r_l$ . Учитывая выражения (4), (5), (7), (8) и линейность оператора дифференцирования, получим

$$[\hat{\sigma} E_r]|_{r=r_l} = -\text{div } \mathbf{J}^{\text{ct}}(\varphi, z),$$

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_r)}{\partial r} \right] \Big|_{r=r_l} = -\text{rot}_r \mathbf{J}^{\text{ct}}(\varphi, z).$$

Таким образом, для нормальных компонент электромагнитного поля окончательно имеем следующие граничные условия ( $r = r_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ):

$$[\widehat{\sigma}E_r]_{r=r_n} = \begin{cases} -\operatorname{div} \mathbf{J}^{\text{ct}}(\varphi, z), & n = l, \\ 0, & n \neq l, \end{cases} \quad (10)$$

$$\left[ \frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} \right]_{r=r_n} = 0, \quad (11)$$

$$[\mu H_r]_{r=r_n} = 0, \quad (12)$$

$$\left[ \frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} \right]_{r=r_n} = \begin{cases} -\operatorname{rot}_r \mathbf{J}^{\text{ct}}(\varphi, z), & n = l, \\ 0, & n \neq l. \end{cases} \quad (13)$$

Мы должны констатировать, что задача с произвольным источником пока не свелась к скалярным независимым задачам. В уравнениях (9) для  $E_r$  и  $H_r$  участвуют также компоненты  $E_\varphi$  и  $H_\varphi$ .

**2. Осесимметричная задача.** То, что общая задача не вполне скаляризовалась, грозит существенными осложнениями. Поэтому имеет смысл выделить практически важный случай осесимметричного и соосного с цилиндрически-слоистой средой распределения стороннего тока

$$\mathbf{J}^{\text{ct}}(z) \equiv \{J_\varphi^{\text{ct}}(z), J_z^{\text{ct}}(z)\}.$$

Тогда решение также не будет зависеть от  $\varphi$  и задача радикально упрощается. Уравнения для  $H_r$ ,  $E_r$  принимают вид

$$\Delta F - \frac{1}{r^2}F - k_n^2 F = 0, \quad F(r, z) = H_r(r, z), E_r(r, z), \quad (14)$$

и условия для нормальных компонент электромагнитного поля ( $r = r_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ) принимают вид

$$[\widehat{\sigma}E_r]_{r=r_n} = \begin{cases} -\frac{\partial J_z^{\text{ct}}}{\partial z}, & n = l, \\ 0, & n \neq l, \end{cases} \quad (15)$$

$$\left[ \frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} \right]_{r=r_n} = 0, \quad (16)$$

$$[\mu H_r]_{r=r_n} = 0, \quad (17)$$

$$\left[ \frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} \right]_{r=r_n} = \begin{cases} \frac{\partial J_\varphi^{\text{ct}}}{\partial z}, & n = l, \\ 0, & n \neq l. \end{cases} \quad (18)$$

Задачи (14)–(18) для  $H_r$ ,  $E_r$  скалярны и независимы. Решим эти задачи разделением переменных, воспользовавшись преобразованием Фурье по координате  $z$ :

$$f(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(r, \xi) e^{i\xi z} d\xi, \quad f^*(r, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r, z) e^{-i\xi z} dz. \quad (19)$$

Если применить преобразование Фурье к задачам (14)–(18) для  $H_r$ ,  $E_r$  и определить

$$E_r^*(r, \xi) = X(r)A^*(\xi), \quad H_r^*(r, \xi) = Y(r)B^*(\xi), \quad (20)$$

где

$$A^*(\xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial J_z^{\text{сг}}}{\partial z} e^{-i\xi z} dz, \quad B^*(\xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial J_\varphi^{\text{сг}}}{\partial z} e^{-i\xi z} dz,$$

мы сведем задачу к нахождению двух совершенно независимых друг от друга и от конфигурации источника функций  $X$  и  $Y$ , которые в каждом однородном слое ( $n = 0, 1, \dots, N$ ) удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \left( \frac{1}{r^2} + p_n^2 \right) F = 0, \quad F = X, Y \quad (21)$$

(где  $p_n = \sqrt{k_n^2 + \xi^2}$ ), но разным условиям на границах ( $r = r_n, n = 1, 2, \dots, N$ ):

$$\text{для } X \quad [\widehat{\sigma}X]_{r=r_n} = \begin{cases} 1, & n = l, \\ 0, & n \neq l, \end{cases} \quad \left[ \frac{X}{r} + X'_r \right]_{r=r_n} = 0, \quad (22)$$

для  $Y$

$$[\mu Y]_{r=r_n} = 0, \quad \left[ \frac{Y}{r} + Y'_r \right]_{r=r_n} = \begin{cases} 1, & n = l, \\ 0, & n \neq l, \end{cases} \quad (23)$$

причем  $X$  и  $Y$  имеют конечные значения при  $r = 0$ , а также эти функции стремятся к нулю при  $r \rightarrow \infty$ .

Применим преобразование Фурье (19) к системе уравнений (7), (8), учитывая теперь их независимость от  $\varphi$ :

$$i\xi H_\varphi^* = -\widehat{\sigma}_n E_r^*, \quad (24)$$

$$i\xi E_\varphi^* = -i\omega\mu_n H_r^*, \quad (25)$$

$$i\xi E_z^* = -\frac{E_r^*}{r} - \frac{\partial E_r^*}{\partial r}, \quad (26)$$

$$i\xi H_z^* = -\frac{H_r^*}{r} - \frac{\partial H_r^*}{\partial r}. \quad (27)$$

Из системы уравнений (24)–(27) легко получить выражения для образов Фурье всех компонент электромагнитного поля в каждом однородном слое ( $n = 0, 1, \dots, N$ ):

$$H_r^* = Y B^*, \quad E_r^* = X A^*, \quad (28)$$

$$H_\varphi^* = \frac{i\xi r^2 \widehat{\sigma}_n}{r^2 \xi^2} X A^*, \quad E_\varphi^* = -\frac{\xi r^2 \omega \mu_n}{r^2 \xi^2} Y B^*, \quad (29)$$

$$H_z^* = \frac{i\xi r}{r^2 \xi^2} \left( Y + r \frac{\partial Y}{\partial r} \right) B^*, \quad E_z^* = \frac{i\xi r}{r^2 \xi^2} \left( X + r \frac{\partial X}{\partial r} \right) A^*. \quad (30)$$

Решим краевые задачи (21)–(23). Обозначим  $X(r)$  и  $Y(r)$  через  $R(r)$ , так как данные функции зависят только от  $r$  и удовлетворяют одному и тому же уравнению. Функцию  $R(r)$  определим как

$$R(r) = \begin{cases} P\zeta(r), & r < r_l, \\ Q\zeta(r), & r > r_l. \end{cases}$$

Заметим, что функция  $\zeta(r)$ , как и функция  $R(r)$ , является решением уравнения (21), т. е.

$$\zeta''_{rr} + \frac{\zeta'_r}{r} - \left( \frac{1}{r^2} + p_n^2 \right) \zeta = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\zeta(r) = C_n I_1(p_n r) + D_n K_1(p_n r), \quad (31)$$

где  $C_n$  и  $D_n$  — некоторые постоянные, определенные в каждом слое.

Будем искать функцию  $\zeta(r)$  в каждом однородном слое ( $n = 0, 1, \dots, N$ ) в виде (31), выражая ее через свои же значения на ближней ( $r = r_n$ ) и дальней ( $r = r_{n+1}$ ) границах  $n$ -го слоя. Сразу заметим, что нулевой и  $N$ -й слои будут рассмотрены отдельно.

Сначала выразим функцию  $\zeta(r)$  через ее значения на ближней границе  $n$ -го слоя ( $n = 1, 2, \dots, N-1$ ). Для каждого слоя имеем значения на границе (изнутри слоя)  $\zeta_{n+0} = \zeta(r_{n+0})$  и  $\zeta'_{n+0} = \zeta'_r(r)|_{r=r_{n+0}}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ :

$$\zeta(r) = r_n [\zeta_{n+0} \alpha_{n+0}(r, n) - \zeta'_{n+0} \beta_{n+0}(r, n)], \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{n+0}(r, n) &= I'_{1,r}|_{r=r_n} K_1(p_n r) - K'_{1,r}|_{r=r_n} I_1(p_n r), \\ \beta_{n+0}(r, n) &= I_1(p_n r_n) K_1(p_n r) - K_1(p_n r_n) I_1(p_n r), \\ I'_{1,r}|_{r=r_n} &= \left. \frac{\partial I_1(p_n r)}{\partial r} \right|_{r=r_n}, \quad K'_{1,r}|_{r=r_n} = \left. \frac{\partial K_1(p_n r)}{\partial r} \right|_{r=r_n}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом выводится выражение для функции  $\zeta(r)$  через ее значения на дальней границе  $n$ -го слоя ( $n = 1, 2, \dots, N-1$ ). Для каждого слоя, имея значения на границе (изнутри слоя)  $\zeta_{n+1-0} = \zeta(r_{n+1-0})$  и  $\zeta'_{n+1-0} = \zeta'_r(r)|_{r=r_{n+1-0}}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , получим

$$\zeta(r) = r_{n+1} [\zeta_{n+1-0} \alpha_{n+1-0}(r, n) - \zeta'_{n+1-0} \beta_{n+1-0}(r, n)], \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1-0}(r, n) &= I'_{1,r}|_{r=r_{n+1}} K_1(p_n r) - K'_{1,r}|_{r=r_{n+1}} I_1(p_n r), \\ \beta_{n+1-0}(r, n) &= I_1(p_n r_{n+1}) K_1(p_n r) - K_1(p_n r_{n+1}) I_1(p_n r). \end{aligned}$$

Нулевой и  $N$ -й слои вынесены в отдельный случай, так как в этих слоях накладываются дополнительные условия на функцию  $\zeta(r)$ , а именно, в нулевом слое она должна иметь конечное значение, а в  $N$ -м стремиться к нулю. Отсюда для нулевого и  $N$ -го слоев имеем

$$\zeta(r) = \frac{\zeta_{1-0}}{I_1(p_0 r_1)} I_1(p_0 r), \quad \zeta(r) = \frac{\zeta_{N+0}}{K_1(p_N r_N)} K_1(p_N r). \quad (34)$$

Таким образом, имеем выражения функции  $\zeta(r)$  в каждом однородном слое ( $r_n \leq r \leq r_{n+1}$ ) через ее же значения на границах.

При переходе границ между слоями ( $r = r_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $n \neq l$ ) непрерывны следующие функции:

для  $X$

$$f = \zeta/r + \zeta'_r, \quad h = \hat{\sigma}\zeta;$$

для  $Y$

$$f = \mu\zeta, \quad h = \zeta/r + \zeta'_r.$$

Формулы (32)–(34) представляют собой рекуррентный механизм расчетов поля в слоистой среде.

Константы  $P$  и  $Q$  определяются из условий на границе с источником. Окончательно имеем

$$R(r) = \frac{f_{l+0}}{f_{l-0}h_{l+0} - f_{l+0}h_{l-0}}\zeta(r), \quad r < r_l,$$

$$R(r) = \frac{f_{l-0}}{f_{l-0}h_{l+0} - f_{l+0}h_{l-0}}\zeta(r), \quad r > r_l.$$

Таким способом можно последовательно, переходя от одного слоя к другому и применяя формулы (32)–(34), вычислить значения функции  $R(r)$ , причем значение  $\zeta_{1-0}$  (на внутренней стороне первой границы) произвольно.

Итак, мы нашли решение для функций  $X$  и  $Y$ , что определяет по формулам (20) нормальные компоненты (их прообразы). Тем самым мы нашли решения для всех компонент поля.

**3. Общая задача.** Приступим к поиску компонент электромагнитного поля при условии их зависимости от  $\varphi$ , т. е.

$$\mathbf{J}^{\text{сг}}(\varphi, z) \equiv \{J_{\varphi}^{\text{сг}}(\varphi, z), J_z^{\text{сг}}(\varphi, z)\}.$$

Будем решать задачи (9)–(13), воспользовавшись двумерным преобразованием Фурье по координатам  $\varphi$  и  $z$ :

$$f(r, \varphi, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(r, m, \xi) e^{i\xi z} d\xi,$$

$$f^*(r, m, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi, z) e^{-im\varphi} e^{-i\xi z} d\varphi dz.$$
(35)

Применим преобразование Фурье (35) к системе уравнений (7), (8) и выразим образы  $\varphi$  компонент электромагнитного поля:

$$i\xi H_{\varphi}^* = \frac{im}{r} H_z^* - \hat{\sigma}_n E_r^*, \quad i\xi E_{\varphi}^* = \frac{im}{r} E_z^* - i\omega\mu_n H_r^*,$$

$$\frac{im}{r} E_{\varphi}^* = -i\xi E_z^* - \frac{E_r^*}{r} - \frac{\partial E_r^*}{\partial r}, \quad \frac{im}{r} H_{\varphi}^* = -i\xi H_z^* - \frac{H_r^*}{r} - \frac{\partial H_r^*}{\partial r}.$$

В силу того, что эти образы выражаются через образы других компонент, уже на данном этапе можно предположить, что решив краевую задачу для  $z$ -компонент, нам все-таки удастся свести исходную задачу в ее общей постановке к нахождению радиальных компонент электромагнитного поля.

Действуя аналогичным образом, как и в осесимметричном случае, перейдем к постановке задачи для  $E_z$  и  $H_z$ . Для них имеем уравнение

$$\Delta F - k_n^2 F = 0, \quad F = H_z, E_z. \quad (36)$$

Введем еще одно ограничение, а именно, будем рассматривать только  $z$ -компоненту магнитного поля, что означает, что у нас есть только индуктивный источник стороннего тока. Для нее имеем следующие граничные условия ( $r = r_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ):

$$[H_z]|_{r=r_n} = \begin{cases} -J_{\varphi}^{\text{сг}}(\varphi, z), & n = l, \\ 0, & n \neq l. \end{cases} \quad (37)$$



Следовательно, если применить преобразование Фурье к задачам (36), (37) для  $H_z$  и определить

$$H_z^*(r, m, \xi) = Y_m(r)B_m^*(\xi), \quad (38)$$

где

$$B_m^*(\xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} J_{\varphi}^{\text{CT}}(\varphi, z) e^{-m\varphi} e^{-i\xi z} d\varphi dz,$$

мы сведем и эту задачу к нахождению функции  $Y_m$ , которая в каждом однородном слое ( $n = 0, 1, \dots, N$ ) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 Y_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y_m}{\partial r} - \left( \frac{m^2}{r^2} + p_n^2 \right) Y_m = 0,$$

где  $p_n = \sqrt{k_n^2 + \xi^2}$ , и условиям на границах ( $r = r_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ )

$$[Y_m]_{r=r_n} = \begin{cases} 1, & n = l, \\ 0, & n \neq l, \end{cases} \quad \left[ \frac{\partial Y_m}{\partial r} \right]_{r=r_n} = 0,$$

причем  $Y_m \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Таким образом, мы получили краевую задачу, аналогичную осесимметричной. Определяя функцию  $Y_m(r)$  как

$$Y_m(r) = \begin{cases} P_m \zeta(r), & r < r_l, \\ Q_m \zeta(r), & r > r_l, \end{cases}$$

и не вдаваясь в детали решения, приведем окончательный результат. Имеем следующие выражения функции  $\zeta(r)$  в каждом однородном слое ( $r_n \leq r \leq r_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N-1$ ) через ее же значения на границах:

на дальней границе

$$\zeta(r) = \frac{\zeta_{1-0}}{I_m(p_0 r_1)} I_m(p_0 r), \quad r \leq r_1, \quad (39)$$

$$\zeta(r) = r_{n+1} [\zeta_{n+1-0} \alpha_{n+1-0}(r, n) - \zeta'_{n+1-0} \beta_{n+1-0}(r, n)]; \quad (40)$$

на ближней границе

$$\zeta(r) = r_n [\zeta_{n+0} \alpha_{n+0}(r, n) - \zeta'_{n+0} \beta_{n+0}(r, n)], \quad (41)$$

$$\zeta(r) = \frac{\zeta_{N+0}}{K_m(p_N r_N)} K_m(p_N r), \quad r \geq r_N, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{n+0}(r, n) &= I'_{m,r} \Big|_{r=r_n} K_m(p_n r) - K'_{m,r} \Big|_{r=r_n} I_m(p_n r), \\ \alpha_{n+1-0}(r, n) &= I'_{m,r} \Big|_{r=r_{n+1}} K_m(p_n r) - K'_{m,r} \Big|_{r=r_{n+1}} I_m(p_n r), \\ \beta_{n+0}(r, n) &= I_m(p_n r_n) K_m(p_n r) - K_m(p_n r_n) I_m(p_n r), \\ \beta_{n+1-0}(r, n) &= I_m(p_n r_{n+1}) K_m(p_n r) - K_m(p_n r_{n+1}) I_m(p_n r), \\ I'_{m,r} \Big|_{r=r_n} &= \frac{\partial I_m(p_n r)}{\partial r} \Big|_{r=r_n}, \quad K'_{m,r} \Big|_{r=r_n} = \frac{\partial K_m(p_n r)}{\partial r} \Big|_{r=r_n}. \end{aligned}$$

Как и в осесимметричной задаче, получаются выражения для коэффициентов  $P_m$  и  $Q_m$ . Откуда следуют выражения для функции  $Y_m(r)$ :

$$Y_m(r) = \frac{\zeta'_{l+0}}{\zeta'_{l-0}\zeta_{l+0} - \zeta'_{l+0}\zeta_{l-0}}\zeta(r), \quad r < r_l,$$

$$Y_m(r) = \frac{\zeta'_{l-0}}{\zeta'_{l-0}\zeta_{l+0} - \zeta'_{l+0}\zeta_{l-0}}\zeta(r), \quad r > r_l.$$

Таким образом, можно последовательно, переходя от одного слоя к другому и применяя формулы (39)–(42), вычислить значения функции  $Y_m(r)$ , причем значение  $\zeta_{1-0}$  (на внутренней стороне первой границы) произвольно.

Итак, мы нашли решение для функций  $Y_m$ , что определяет по формуле (38) образ компоненты  $H_z$ , а следовательно, и саму компоненту.

Теперь мы можем перейти к решению исходной задачи в ее общей постановке. После применения преобразования Фурье (35) имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 H_r^*}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial H_r^*}{\partial r} - \left( \frac{m^2 - 1}{r^2} + p_n^2 \right) H_r^* = -\frac{2i\xi}{r} H_z^*,$$

где  $p_n = \sqrt{k_n^2 + \xi^2}$ , и граничные условия ( $r = r_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ )

$$\begin{aligned} & [\mu H_r^*] \Big|_{r=r_n} = 0, \\ & \left[ \frac{H_r^*}{r} + \frac{\partial H_r^*}{\partial r} \right] \Big|_{r=r_n} = \begin{cases} - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \text{rot}_r \mathbf{J}^{\text{CT}}(\varphi, z) e^{-im\varphi} e^{-i\xi z} d\varphi dz, & n = l, \\ 0, & n \neq l. \end{cases} \end{aligned}$$

Полагая

$$H_r^*(r, m, \xi) = Y_m(r, r_l) B_m^*(\xi), \quad (43)$$

где

$$B_m^*(\xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \text{rot}_r \mathbf{J}^{\text{CT}}(\varphi, z) e^{-im\varphi} e^{-i\xi z} d\varphi dz,$$

мы сведем и эту задачу к нахождению функции  $Y_m$ , которая в каждом однородном слое ( $n = 0, 1, \dots, N$ ) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 Y_m}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial Y_m}{\partial r} - \left( \frac{m^2 - 1}{r^2} + p_n^2 \right) Y_m = -\frac{2i\xi}{r} H_z^*(r, m, \xi) = F_m(r, r_l) \quad (44)$$

и условиям на границах ( $r = r_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ )

$$[\mu Y_m] \Big|_{r=r_n} = 0, \quad (45)$$

$$\left[ \frac{Y_m}{r} + \frac{\partial Y_m}{\partial r} \right] \Big|_{r=r_n} = \begin{cases} 1, & n = l, \\ 0, & n \neq l, \end{cases} \quad (46)$$

причем  $Y_m$  конечна при  $r = 0$  и  $Y_m \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Сначала решим задачу (44)–(46) без правой части. Определим решение этой задачи  $Y_m^0(r, r_l)$  как

$$Y_m^0(r, r_l) = \begin{cases} P_m \zeta(r), & r < r_l, \\ Q_m \zeta(r), & r > r_l. \end{cases}$$

Имеем следующие выражения функции  $\zeta(r)$  в каждом однородном слое ( $r_n \leq r \leq r_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N-1$ ) через ее же значения на границах:  
на дальней границе

$$\zeta(r) = \frac{r_1 \zeta_{1-0}}{I_m(p_0 r_1)} \frac{I_m(p_0 r)}{r}, \quad r \leq r_1,$$

$$\zeta(r) = \frac{r_{n+1}}{r} [\zeta_{n+1-0} \alpha_{n+1-0}(r, n) - \zeta'_{n+1-0} \beta_{n+1-0}(r, n)];$$

на ближней границе

$$\zeta(r) = \frac{r_n}{r} [\zeta_{n+0} \alpha_{n+0}(r, n) - \zeta'_{n+0} \beta_{n+0}(r, n)],$$

$$\zeta(r) = \frac{r_N \zeta_{N+0}}{K_m(p_N r_N)} \frac{K_m(p_N r)}{r}, \quad r \geq r_N,$$

где

$$\alpha_{n+0}(r, n) = [r_n I'_{m,r}(p_n r)|_{r=r_n} - I_m(p_n r_n)] K_m(p_n r) - [r_n K'_{m,r}(p_n r)|_{r=r_n} - K_m(p_n r_n)] I_m(p_n r),$$

$$\alpha_{n+1-0}(r, n) = [r_{n+1} I'_{m,r}(p_n r)|_{r=r_{n+1}} - I_m(p_n r_{n+1})] K_m(p_n r) - [r_{n+1} K'_{m,r}(p_n r)|_{r=r_{n+1}} - K_m(p_n r_{n+1})] I_m(p_n r),$$

$$\beta_{n+0}(r, n) = r_n [I_m(p_n r_n) K_m(p_n r) - K_m(p_n r_n) I_m(p_n r)],$$

$$\beta_{n+1-0}(r, n) = r_{n+1} [I_m(p_n r_{n+1}) K_m(p_n r) - K_m(p_n r_{n+1}) I_m(p_n r)].$$

Выражая коэффициенты  $P_m$  и  $Q_m$ , получим соотношения для функции  $Y_m^0(r)$ :

$$Y_m^0(r, r_l) = \frac{f_{l+0}}{f_{l-0} h_{l+0} - f_{l+0} h_{l-0}} \zeta(r), \quad r < r_l,$$

$$Y_m^0(r, r_l) = \frac{f_{l-0}}{f_{l-0} h_{l+0} - f_{l+0} h_{l-0}} \zeta(r), \quad r > r_l,$$

где  $f = \mu \zeta$ ,  $h = \zeta/r + \zeta'$ .

Можно показать, что решение краевой задачи (44)–(46) имеет следующий вид:

$$Y_m(r, r_l) = Y_m^0(r, r_l) + \int_0^\infty Y_m^0(r, \bar{r}) F_m(\bar{r}, r_l) d\bar{r}, \quad n = 0, 2, \dots, N-2. \quad (47)$$

В самом деле, подставим выражение (47) в краевую задачу (44)–(46). Условия на границах удовлетворяются, и уравнение (44) принимает вид

$$\int_0^\infty \left[ \frac{\partial^2 Y_m^0}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial Y_m^0}{\partial r} - \left( \frac{m^2 - 1}{r^2} + p_n^2 \right) Y_m^0 \right] F_m(\bar{r}, r_l) d\bar{r} = F_m(r, r_l).$$

Подынтегральная функция равна нулю за исключением точки  $\bar{r} = r$ , где функция  $Y_m^0$  терпит разрыв в случае неоднородной среды, а в случае однородной разрывна первая производная функции  $Y_m^0$ , так что

$$\frac{\partial^2 Y_m^0(r, \bar{r})}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial Y_m^0(r, \bar{r})}{\partial r} - \left( \frac{m^2 - 1}{r^2} + p_n^2 \right) Y_m^0(r, \bar{r}) = \delta(r - \bar{r}),$$

из чего следует, что решение (47) действительно удовлетворяет уравнению (44).

Надо заметить, что данное решение верно для ненулевых гармоник ( $m \neq 0$ ). Случай  $m = 0$  необходимо рассмотреть отдельно.

**4. Токовая осесимметричная петля.** Продемонстрируем расчеты с использованием полученных решений. Прежде всего необходимо рассмотреть некоторый конкретный источник электромагнитного поля. Заметим, что после разделения переменных (20) параметры источника (распределение поверхностной плотности стороннего тока  $\mathbf{J}^{\text{сг}}$ ) входят только в функции  $A^*(\xi)$  и  $B^*(\xi)$ , из чего следует, что нам достаточно для каждого конкретного источника определить эти функции.

Возьмем такой практически важный случай, как распределение стороннего тока с азимутальной симметрией или, еще конкретнее, токовую петлю (радиус  $r_l$ , ток  $I$ ), симметричную относительно оси  $z$  при  $z = z_0$  (рис. 2).

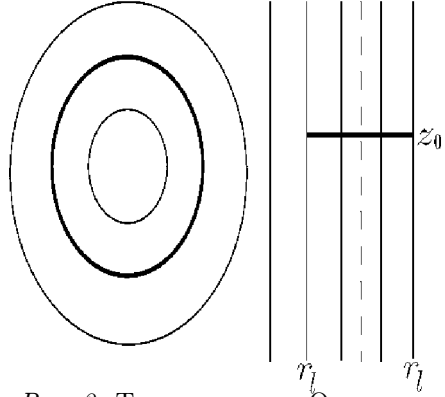


Рис. 2. Токовая петля. Осесимметричная модель

Для такого источника имеется только компонента  $J_\varphi^{\text{сг}}(\varphi, z)$ , причем  $J_\varphi^{\text{сг}}(\varphi, z) = I\delta(z - z_0)$ , где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

Таким образом,

$$A^*(\xi) = 0,$$

$$B^*(\xi) = I \int_{-\infty}^{\infty} \delta'_z(z - z_0) e^{-i\xi z} dz = i\xi I e^{-i\xi z_0}.$$

Тогда образы Фурье ненулевых компонент электромагнитного поля в соответствии с (28)–(30) примут вид

$$H_r^* = i\xi I e^{-i\xi z_0} Y, \quad H_z^* = -\frac{I}{r} \left( Y + r \frac{\partial Y}{\partial r} \right) e^{-i\xi z_0}, \quad E_\varphi^* = -i\omega\mu_n I e^{-i\xi z_0} Y.$$

Сами компоненты электромагнитного поля выражаются следующим образом:

$$H_r(r, z) = \frac{iI}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y e^{i\xi(z-z_0)} \xi d\xi,$$

$$H_z(r, z) = -\frac{I}{2\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \left( Y + r \frac{\partial Y}{\partial r} \right) e^{i\xi(z-z_0)} d\xi,$$

$$E_\varphi(r, z) = -i\omega\mu_n \frac{I}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y e^{i\xi(z-z_0)} d\xi.$$

Этот алгоритм численно реализован. Интегрирование проводилось методом Гаусса (9-точечная схема). Если точка наблюдения находилась на достаточном удалении по радиусу от границы с источником, то интегрирование проводилось по вещественной оси. В противном случае путь интегрирования определялся в комплексной плоскости.

Приведем здесь расчет, который носит характер тестового. Для проверки алгоритма использовалась слоистая модель, в которой задавались одинаковые проводимости (а также проницаемости) слоев. Расчеты для такой фактически однородной модели сравнивались с расчетами поля для однородного пространства, простые выражения для которого хорошо известны (рис. 3).

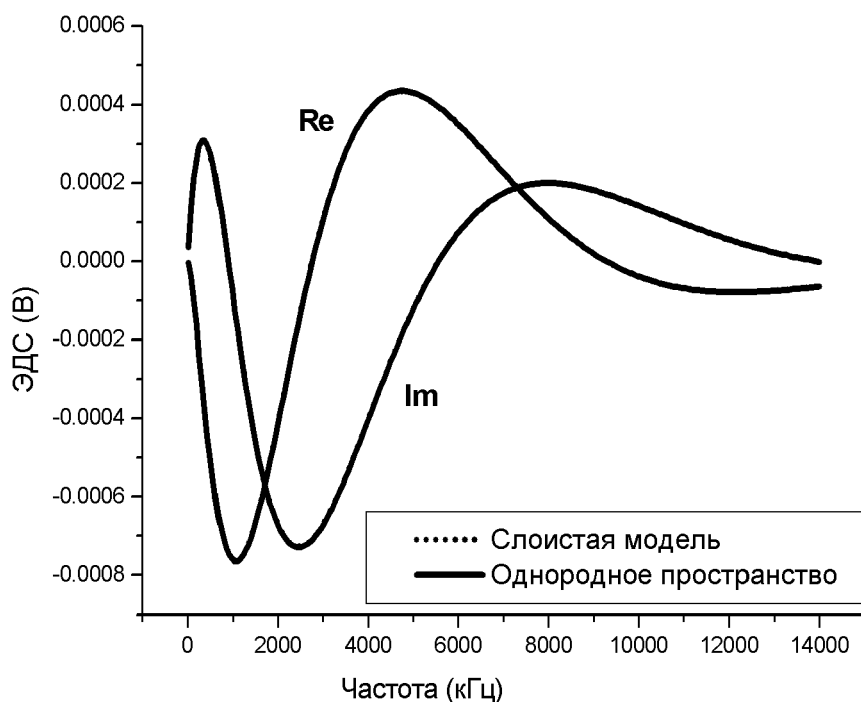


Рис. 3. Сравнение расчетов для псевдослоистой модели и однородного пространства

Как видно из рисунка, кривые мнимой и реальной частей ЭДС здесь визуально совпадают, а средняя ошибка составила 1,55% и 1,03% для мнимой и реальной частей соответственно. Моделирование проводилось при удельном сопротивлении среды 3 Ом·м на частотах от 20 кГц до 14 МГц, при этом радиусы генераторной и приемной петель были равны 0,062 м, а разнос между ними составлял 2 м.

Для количественного сравнения разработанного алгоритма с уже существующими приведем пример работы алгоритма в четырехслойной модели (генераторная катушка располагается на фиктивной цилиндрической границе) источников, приемников и частот, применяемых в методе ВИКИЗ (высокочастотное индукционное коротажное изопараметрическое зондирование). Слои с радиальными размерами 0,062, 0,073, 0,108 м и удельными сопротивлениями  $10^3$ , 2, 10 Ом·м соответственно представляют прибор (нулевой и первый слой), скважину и пласт.

Прибор ВИКИЗ состоит из пяти зондов, каждый из которых имеет три соосных катушки с одинаковыми радиусами 0,062 м, из которых одна генераторная и две приемных (рис. 4); каждый зонд имеет свою длину и работает на определенной частоте (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

## Частоты и размеры зондов ВИКИЗ

| Номер зонда | Расстояние Г-П <sub>1</sub> (м) | Расстояние Г-П <sub>2</sub> (м) | Частота (кГц) |
|-------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------|
| 1           | 2,0                             | 1,6                             | 875           |
| 2           | 1,4142                          | 1,1314                          | 1750          |
| 3           | 1,0                             | 0,8                             | 3500          |
| 4           | 0,7071                          | 0,5657                          | 7000          |
| 5           | 0,5                             | 0,4                             | 14000         |

В данном примере рассчитывалась угловая компонента электрического поля  $E_\varphi$  в дальней приемной катушке П<sub>1</sub>. Результаты работы вышеописанного алгоритма сравнивались с результатами программы, апробированной и давно используемой в матобеспечении ВИКИЗ (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

Значения поля  $E_\varphi$ 

| Номер зонда | Значения $\text{Re } E_\varphi$ |             | Значения $\text{Im } E_\varphi$ |            |
|-------------|---------------------------------|-------------|---------------------------------|------------|
|             | тестовые                        | расчетные   | тестовые                        | расчетные  |
| 1           | -0,00206024                     | -0,00206173 | 0,00250220                      | 0,00250030 |
| 2           | -0,01174271                     | -0,01174628 | 0,01400289                      | 0,01400282 |
| 3           | -0,06742196                     | -0,06742301 | 0,07745190                      | 0,07745016 |
| 4           | -0,39207578                     | -0,39207499 | 0,41779851                      | 0,41779897 |
| 5           | -2,31411648                     | -2,31411701 | 2,13107788                      | 2,13107591 |

Как видно из табл. 2, значения поля  $E_\varphi$ , рассчитанные нами, хорошо совпадают с тестовыми значениями.

Как и в предыдущем примере, рассмотрим источники, приемники и частоты, применяемые в методе ВИКИЗ (см. табл. 1). Теперь рассмотрим пятислойную модель среды, где нулевой и первый слой являются изолирующими (тело зонда), второй слой — скважина с буровым раствором 2 Ом·м, третий — зона проникновения (20 Ом·м) и четвертый — пласт с удельным сопротивлением 5 Ом·м. В силу того, что в методе ВИКИЗ применяются дифференциальные зонды, при расчете также использовались две приемные катушки (рис. 4) и рассчитывалась разность фаз между ними.

Синтетические данные ВИКИЗ (разность фаз) пересчитаны в значения кажущегося сопротивления. Кривая, построенная по пяти значениям, соответствующим показаниям пяти зондов ВИКИЗ, приближается (значением с самого длинного и низкочастотного зонда) к значению сопротивления вмещающего пласта (5 Ом·м).

Заключая данную публикацию, авторы считают своим долгом поблагодарить М. И. Эпова за постоянное внимание к работе, весьма полезные научные консультации и прикладную ориентацию исследований.

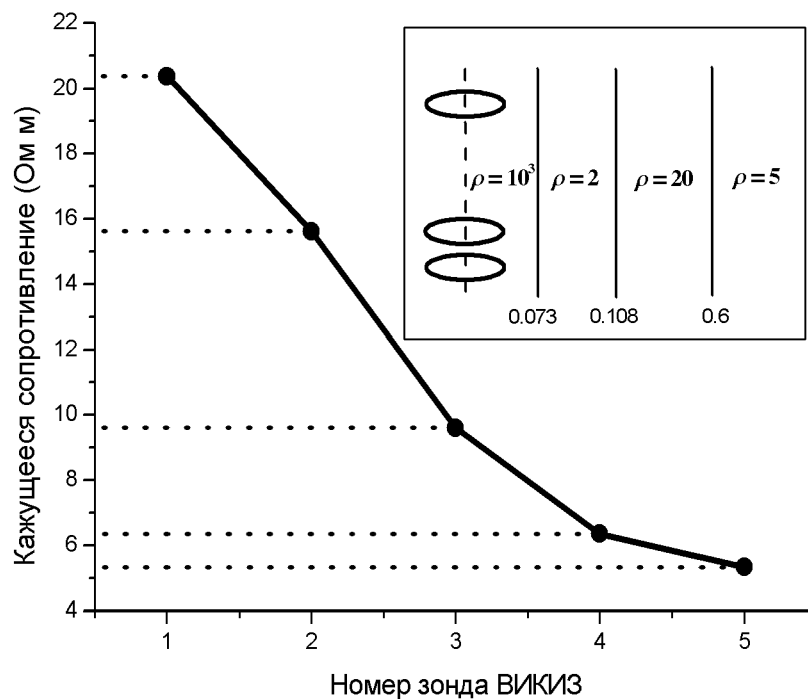


Рис. 4. Кажущееся сопротивление в зависимости от номера зонда ВИКИЗ

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кауфман А. А. Теория индукционного каротажа. Новосибирск: Наука, 1965.
2. Кауфман А. А., Каганский А. М., Кривоуцкий В. С. Радиальные характеристики индукционных зондов, смещенных относительно оси скважины // Геология и геофизика. 1974. №7. С. 102–116.
3. Кауфман А. А., Каганский А. М. Электромагнитное поле горизонтального магнитного диполя на оси скважины // Электромагнитное поле на оси скважины. Новосибирск: изд. ИГиГ СО АН СССР, 1971. С. 3–18.
4. Могилатов В. С. Возбуждение электромагнитного поля в слоистой Земле горизонтальным токовым листом // Изв. РАН. Сер. Физика Земли. 1998. №5. С. 45–53.
5. Табаровский Л. А. Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. Новосибирск: Наука, 1975.

г. Новосибирск  
Институт геофизики СО РАН  
E-mail: gborisov@emf.ru

Статья поступила 13 мая 2002 г.