

УДК 550.837

А. П. Мосин
Российский научный центр «Бэйкер Атлас»
В. С. Могилатов
Новосибирский государственный университет
ИНГГ СО РАН

СРЕДСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО КАРОТАЖА МЕТОДОМ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Рассмотрена цилиндрически-слоистая модель для анализа возможностей метода переходных процессов (или метода зондирования становлением) применительно к каротажу. Разработаны математические средства и демонстрируется их применимость для электромагнитного каротажа методом переходных процессов в многослойных цилиндрических средах.

Ключевые слова: электромагнитный каротаж, метод переходных процессов, вертикальный магнитный диполь, математическое моделирование.

Введение

Изучение возможностей электромагнитного каротажа в импульсном режиме (метод переходных процессов) началось довольно давно. Обычно в качестве пионерской указывается работа А. А. Кауфмана и В. П. Соколова [2]. За прошедшие годы общепризнанных практических методик все же не появилось, но это можно объяснить, наверное, ожиданием достаточного технического прогресса, который бы решил сложные проблемы реализации метода переходных процессов в условиях малых объемов и времен. Однако интерес к этому направлению не утихает, подогреваемый явными достижениями в наземной геоэлектрике (например [7]). Так что методы переходных процессов (МПП) или зондирования становлением (ЗС) остаются одной из перспектив развития электромагнитного каротажа. Возможности в гармоническом режиме компенсировать первичное поле все же ограничены (хотя бы температурной нестабильностью), и это ограничивает чувствительность метода. В режиме становления, под землей, где практически нет электромагнитных помех, можно добиться

необычайной чувствительности (глубинности) за счет регистрации весьма малых сигналов. Укажем еще на одно важное преимущество метода переходных процессов – возможность пространственного совмещения источника и приемника. В гармоническом режиме это невозможно, и все известные на сегодня каротажные приемно-питающие установки имеют существенный разнос, что создает проблему точной привязки значения кажущегося сопротивления.

В предыдущей работе [4] авторы использовали горизонтально-слоистую модель среды. Важно рассмотреть также цилиндрически-слоистую модель, которая формируется в процессе бурения, включает в себя тело прибора и позволяет оценить глубинность индукционных зондирований и исследовать зону проникновения. Эта модель, как и горизонтально-слоистая, имеет большое значение для методических изысканий и для базового проектирования методики и аппаратуры. Конечно, в практической работе с уже выбранным инструментом крайне важны двух- и трехмерные модели.

Отметим также, что режим становления, причем именно с использованием определенных цилиндрически-слоистых моделей сред, предлагался для контроля качества металлических обсадных колонн (например, [6]).

Решение одномерной прямой задачи для цилиндрически-слоистой среды в режиме установления

Рассмотрим решение задачи о поле гармонического стороннего тока в цилиндрически-слоистой среде. Такого рода решения давно известны, сошлемся, например, на основательные работы [1, 5]. Авторы также предлагали свое решение [3], в котором добавлены новые элементы в постановку задачи и которое будет использоваться для построения алгоритма расчета во временной области. Кроме того, это решение и его составляющие будут использоваться для получения новых результатов – выражений для производных по параметрам модели. Здесь только приведем это решение.

Рассмотрим N -слойную среду (N цилиндрических границ – r_i , $i = 1, \dots, N$) (рис. 1). Прилегающая к оси среда имеет индекс 0, а внешняя среда – индекс N (удельные проводимости – σ_i , $i = 0, 1, \dots, N$). Повсюду магнитная проницаемость μ_0 не отличается от проницае-

мости вакуума). На одной из границ распределен поверхностный гармонический ток с частотой ω , имеющий только азимутальную составляющую $j_\phi(z)$, A/m .

Учитывая вид уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе, (ток I сосредоточен на уровне $z = 0$), запишем

$$\begin{aligned} E_\phi &= \frac{i\omega\mu_0 I}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda z) R'(r)/u^2 \cdot d\lambda; \\ H_r &= \frac{I}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\lambda z) R'(r)\lambda/u^2 \cdot d\lambda; \\ H_z &= \frac{I}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda z) R(r)d\lambda, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u_i = \sqrt{\lambda^2 - i\omega\mu_0\sigma_i}$.

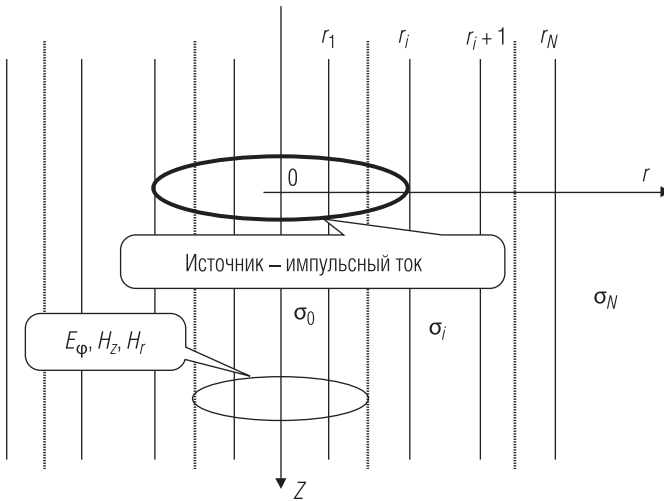


Рис. 1. Модель среды, источник и система координат

Учитывая, что источник расположен на границе $r_{i'}$, имеем следующее:

– выше источника

$$\vec{R}(r) = -\frac{\widehat{Y}_{ir}}{D_{ir}} \cdot \vec{X}(r); \quad r \geq r_{i'}; \quad Y_{ir} = X'_{ir}/u^2; \quad D_{ir} = \vec{X}_{ir}\widehat{Y}_{ir} - \widehat{X}_{ir}\vec{Y}_{ir}; \tag{2}$$

– ниже источника

$$\widehat{R}(r) = -\frac{\widetilde{Y}_r}{D_r} \cdot \widehat{X}(r); \quad r \leq r_{tr}. \quad (3)$$

Функции \widetilde{X} и \widehat{X} обозначают определение сверху, с последней границы, и соответственно снизу, с первой границы. Функции \widetilde{X} и \widehat{X} , \widetilde{Y} и \widehat{Y} определяются следующим образом. Во внешней области при $i = N$ ($r \Rightarrow r_N$)

$$X_N(r) = K_0(u_N r), \quad X'_N(r) = -u_N K_1(u_N r), \quad (4)$$

в каждом слое

$$X_i(r) = -A_i I_0(u_i r) + B_i K_0(u_i r); \quad (5)$$

$$X'_i(r) = -u_i A_i I_1(u_i r) + u_i B_i K_1(u_i r).$$

$$A = -ur K_1(ur) X(r) - r K_0(ur) X'(r); \quad (6)$$

$$B = ur I_1(ur) X(r) - r I_0(ur) X'(r),$$

а при $i = 0$ (внутренняя область, $0 < r \leq r_1$)

$$X_0(r) = -I_0(u_0 r), \quad X'_0(r) = -u_0 I_1(u_0 r). \quad (7)$$

При переходе границы непрерывны

$$X \text{ и } Y = X'/u^2. \quad (8)$$

Формулы (5) и (6) позволяют вычислить значения X и X' на верхней границе слоя через значения на нижней и обратно, то есть организовать рекуррентный расчет. На внешней стороне последней границы

$$X_N = K_0(u_N r_N), \quad X'_N = -u_N K_1(u_N r_N), \quad (9)$$

а на внутренней стороне первой границы

$$X_0 = -I_0(u_0 r_1), \quad X'_0 = -u_0 I_1(u_0 r_1). \quad (10)$$

Итак, имеем решение в частотной области. Численная реализация заключается, в основном, в вычислении интегралов (1). Проблемы возникают при увеличении расстояния от источника до приемника по вертикали из-за осциллирующего фактора. Эта проблема решается путем изменения пути интегрирования в комплексной плоскости так, что осциллирующий фактор трансформируется в затухающий.

Основной подход будет заключаться в трансформации частотных решений во временную область посредством интеграла Фурье совершенно так же, как и в работе [4], в которой рассматривалась

горизонтально-слоистая модель среды. Необходимо отметить, что в работе [6] получены решения во временной области для цилиндрически-слоистых сред альтернативным методом Тихонова.

Тестирование

На основании приведенного выше решения в частотной области и трансформации Фурье была получена программная реализация (программа LCD_TEM). Разумеется, необходимо было тестировать новую программу. Приведем здесь некоторые результаты проверок. Сравним расчеты по программе авторов и расчеты по формулам для однородного пространства, выполненные в работе [2]). Для вертикального магнитного диполя (ВМД) имеем

$$\frac{dB_z}{dt} = \frac{M_z \rho}{2\pi r^5} \sqrt{\frac{2}{\pi}} u^5 e^{-\frac{u^2}{2}}, \tag{11}$$

$$E_\phi = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho M_z}{2\pi r^4} u^5 e^{-\frac{u^2}{2}}, \tag{12}$$

где $\varphi(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u e^{-x^2} dx$; $u = \sqrt{\frac{\mu_0}{2\rho t}} R$; $R = \sqrt{r^2 + z^2}$; $\rho = 1/\sigma$ – удельное электрическое сопротивление (УЭС).

На рис. 2 представлено это сравнение. В программе LCD_TEM использовалась многослойная модель среды с одинаковыми сопротивлениями.

Более интересная возможность оценить работу новой программы предоставляется в сравнении расчетов для цилиндра, образованного тонкой проводящей пленкой (S-труба). Для такого бесконечного цилиндра известно решение [6]. При этом для ЭДС в соосных с цилиндром приемной и питающей петлях

$$\text{ЭДС}(t) = \frac{2I_\phi r_t r_R}{S r^2} \int_0^\infty I_1(\lambda r_t) I_1(\lambda r_R) \frac{\cos(\lambda z)}{[I_1(\lambda r)]^2} \exp\left(-\frac{t}{\mu_0 r S \cdot I_1(\lambda r) K_1(\lambda r)}\right) d\lambda, \tag{13}$$

где r – радиус S-пленки; r_t – радиус источника; r_R – радиус приемника; z – положение приемника (источник в 0); S – продольная проводимость S-пленки, которая в программе представлена как тонкий проводящий слой с $S = \sigma h$; I_ϕ – ток, A ; I и K – модифицированные функции Бесселя. Сравнение представлено на рис. 3.

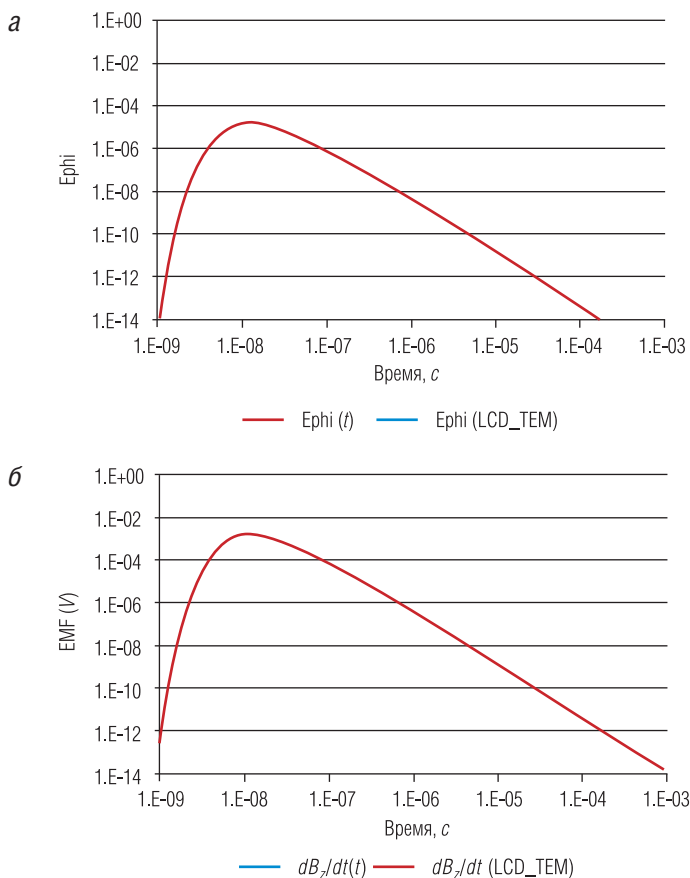


Рис. 2. Сравнение компонент E_{ϕ} и dB_{ϕ}/dt , рассчитанных по формулам (11)–(12) и по программе LCD_TEM в однородной среде $10 \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Радиусы петель – 1 см , разнос – 1 м , ток – 1 А

Следует пояснить, что в программе LCD_TEM модель, соответствующая S-пленке в воздухе, задавалась в виде слоя толщиной 1 см и с сопротивлением $0,0001 \text{ Ом}\cdot\text{м}$ в однородном пространстве, сопротивление которого равно $100 \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Этим и объясняется расхождение в конце процесса становления – сказывается конечное сопротивление вмещающей среды.

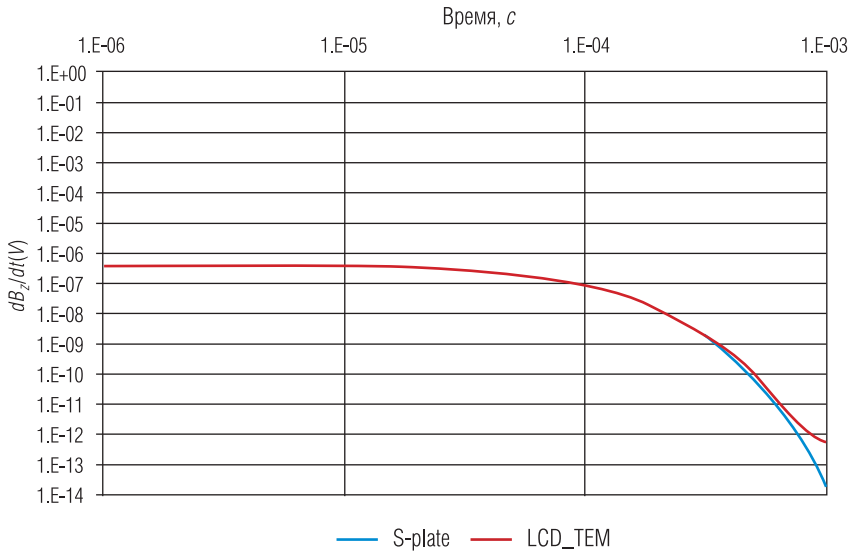


Рис. 3. Кривые становления для цилиндрической пленки в воздухе и цилиндрического тонкого слоя в высокоомном пространстве: $S = 100 \text{ См}$, радиусы петель – 1 см , разнос – 1 м , ток – 1 А

Кривые кажущегося сопротивления

Для визуализации информации, содержащейся в кривых становления, и в качестве первичного шага интерпретации традиционно применяется трансформация ЭДС в кривые кажущегося сопротивления. Они получаются из простого соображения: берется формула поздней стадии становления электромагнитного поля в однородном пространстве. Из данной формулы выражается удельное сопротивление как функция от компоненты поля. Например, для компоненты dB_z/dt получается известное [2] выражение, которое также легко получить из (11) при $t \rightarrow \infty$:

$$\rho_t(t) = \frac{1}{4\pi} \cdot \left(\frac{M}{dB_z/dt} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{\mu_0}{t} \right)^{\frac{5}{3}}. \tag{14}$$

Ниже будут представлены кривые становления в виде кривых кажущегося сопротивления с использованием формулы (14).

Глубинность зондирований

Важное значение одномерной задачи становления в цилиндрической среде состоит в том, что можно провести анализ глубинности методики. Для демонстрации рассмотрим два примера, различающихся сопротивлением бурового раствора (0,5 и 100 Ом·м, радиус скважины 10 см), трехслойных сред, в которых варьировались расстояния до третьего слоя. К скважине примыкает слой с удельным электрическим сопротивлением 1 Ом·м, сопротивление третьего, удаленного слоя 10 Ом·м. Разнесение источника и приемника (катушки радиусом 1 см) составляет 1 м. Временной диапазон выбирался от 1 нс до 1 мс.

На рис. 4 и 5 для разных сопротивлений бурового раствора представлены кривые ρ_t . Шифр кривых – расстояние до границы с удаленным слоем. Выход кривых ρ_t на значение УЭС удаленного слоя (10 Ом·м) свидетельствует, очевидно, о влиянии этого слоя и о достаточной глубинности. При этом нужно соотносить это с уровнем измеряемого сигнала.

На рис. 4 и 5 показано также, что влияние сопротивления бурового раствора очень незначительно для использованных конфигураций и геоэлектрических моделей.

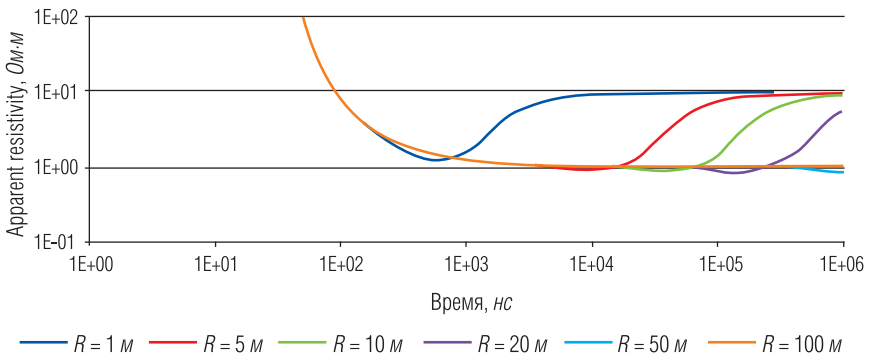


Рис. 4. Соленый (полимерный) буровой раствор, $\rho = 0,5$ Ом·м. Кривые ρ_t для разных удалений (R) границы вмещающего пространства с сопротивлением 10 Ом·м

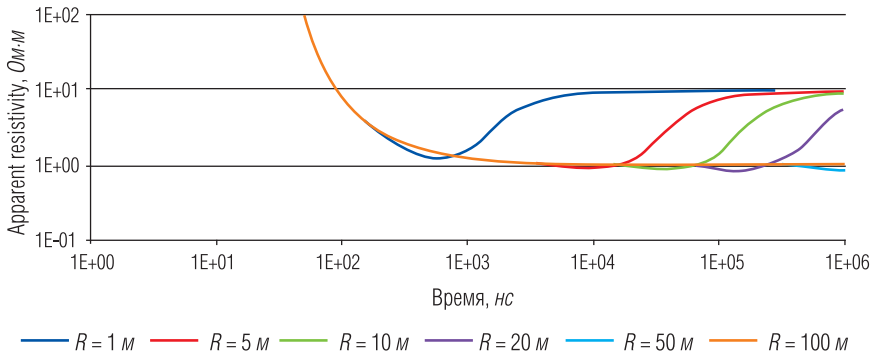


Рис. 5. Буровой раствор на нефтяной основе, $\rho = 100 \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Кривые ρ_t для разных удалений (R) границы вмещающего пространства с сопротивлением $10 \text{ Ом}\cdot\text{м}$

Производные поля по параметрам модели среды

Быстрый расчет производных – очень полезная возможность для анализа чувствительности установки и инверсии данных. В работе [3] были предложены формулы в частотном режиме. Возмущение границы и проводимости приводит к появлению дополнительного тока с плотностью $\Delta\sigma \cdot E_\phi$. Учитывая выражение для E_ϕ (1), получим для i -й границы

$$\frac{\partial R}{\partial r_i} = i\omega\mu_0(\sigma_i - \sigma_{i-1}) \frac{\tilde{Y}_{tr}\tilde{Y}_i\tilde{Y}_i}{D_{tr}D_i} \cdot \tilde{X}(r), \quad r_i > r_{tr}, \quad r. \tag{15}$$

Заметим, что $D_i = D_{tr} \cdot r_{tr}/r_i$.

В случае возмущения проводимости в i -м слое необходимо учесть дополнительный ток по всей толщине слоя, то есть проинтегрировать. Имеем интеграл

$$\int rYYdr = \frac{r^2}{2}(YY - XX/u^2) + rXY/u^2,$$

так что для i -го слоя ($r_i \leq r \leq r_{i+1}$)

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma_i} = i\omega\mu_0 \frac{\widehat{Y}_{ir} \cdot a_i}{D_{ir} D_{ir} r_{ir}} \cdot \widehat{X}(r), \quad r_i > r_{ir}, \quad r;$$

$$a_i = \frac{r_{i+1}^2}{2} (\widetilde{Y}_{i+1} \widetilde{Y}_{i+1} - \widetilde{X}_{i+1} \widetilde{X}_{i+1} / u_i^2) + r_{i+1} \widetilde{X}_{i+1} \widetilde{Y}_{i+1} / u_i^2 - \frac{r_i^2}{2} (\widetilde{Y}_i \widetilde{Y}_i - \widetilde{X}_i \widetilde{X}_i / u_i^2) - r_i \widetilde{X}_i \widetilde{Y}_i / u_i^2;$$

$$a_0 = \frac{r_1^2}{2} (\widetilde{Y}_1 \widetilde{Y}_1 - \widetilde{X}_1 \widetilde{X}_1 / u_0^2) + r_1 \widetilde{X}_1 \widetilde{Y}_1 / u_0^2; \quad (16)$$

$$a_N = -\frac{r_N^2}{2} (\widetilde{Y}_N \widetilde{Y}_N - \widetilde{X}_N \widetilde{X}_N / u_N^2) + r_N \widetilde{X}_N \widetilde{Y}_N / u_N^2.$$

Здесь была рассмотрена одномерная модель, аналогично можно построить и производную по некоторой локальной области. Переходный режим для производных получаем посредством трансформации этих выражений во временную область. В программе LCD_TEM это реализовано. Продемонстрируем расчет производных и возможное их использование в инверсии, построив линеаризованную процедуру прямой задачи. Возьмем ту же конфигурацию и одну из моделей сред, которые были использованы выше (при $R = 1$ м). Построим приближенное решение в окрестности, например, сопротивления третьего слоя ($\rho_0 = 10$ Ом·м):

$$\widetilde{E}(t, \rho) \approx E(t, \rho_0) + \frac{\partial E(t, \rho_0)}{\partial \sigma} \cdot (\rho - \rho_0). \quad (17)$$

Сделаем расчеты по этой формуле для $\rho = 8$ и $\rho = 12$ Ом·м и сравним их с точными расчетами (рис. 6).

Конечно, это простой пример. Используя производные, можно построить линеаризованное представление прямой многопараметрической задачи в окрестности некоторой стартовой среды. Это представление можно использовать как быструю процедуру прямой задачи, но также и для линейной инверсии.

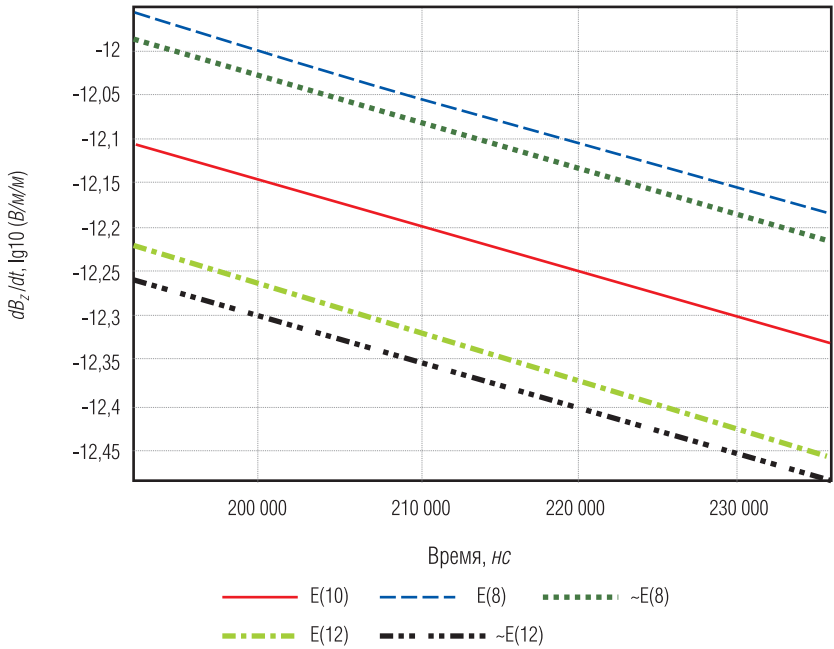


Рис. 6. Точные и приближенные расчеты: E(10), E(8) и E(12) – точный расчет для УЭС третьего слоя, равного соответственно 10, 8 и 12 Ом·м; ~E(8) и ~E(12) – расчет по линеаризованной формуле (17)

Заключение

Рассмотрена цилиндрически-слоистая модель в индукционном каротаже методом переходных процессов. В совокупности с предыдущей работой авторов [4], где рассмотрена горизонтально-слоистая модель, реализован одномерный базовый математический аппарат. Его применение продемонстрировано здесь для решения важного вопроса о глубинности импульсного электромагнитного каротажа. Привнесены некоторые новые элементы (неточечные источники и

приемники, расчет производных по параметрам модели). Это не исчерпывающий математический аппарат, следующим этапом должно стать обеспечение двухмерного и трехмерного подхода к проблемам электромагнитного каротажа методом переходных процессов. Кстати, аналитический расчет производных по параметрам среды подводит довольно близко к алгоритму линейного (борновского) учета влияния двухмерных и трехмерных возмущений проводимости в среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дмитриев В. И.* Осесимметричное электромагнитное поле в цилиндрически-слоистой среде // Известия АН СССР. Физика Земли. 1972. № 11.
2. *Кауфман А. А., Соколов В. П.* Теория индукционного каротажа методом переходных процессов. Новосибирск: Наука, 1972. 128 с.
3. *Могилатов В. С.* Вопросы математического моделирования и инверсии индукционного каротажа для радиально-неоднородных сред // НТВ «Каротажник». Тверь: Изд. АИС. 2015. Вып. 8 (254). С. 81–94.
4. *Мосин А. П., Могилатов В. С.* Математическое обеспечение электромагнитного каротажа методом переходных процессов (слоистая модель среды) // НТВ «Каротажник». Тверь: Изд. АИС. 2015. Вып. 12 (258). С. 63–80.
5. *Табаровский Л. А., Каганский А. М., Эпов М. И.* Электромагнитное поле гармонического источника в анизотропной цилиндрически-слоистой среде // Геология и геофизика. 1976. № 3.
6. *Эпов М. И., Морозова Г. М., Антонов Е. Ю.* Электромагнитная дефектоскопия обсадных колонн нефтегазовых скважин. Новосибирск: Издательство СО РАН, филиал «ГЕО», 2000. 102 с.
7. *Sushant M. Dutta, Arcady Reiderman, Larry G. Schoonover, Michael B. Rabinovich.* New Borehole Transient Electromagnetic System for Reservoir Monitoring // Petrophysics. 2012. Vol. 53. № 3. P. 222–232.

Рецензент доктор физ.-мат. наук В. Н. Глинских