

УДК 550.837

В. С. Могилатов
ИНГГ им. А. А. Трофимука СО РАН
Новосибирский государственный университет

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИНВЕРСИИ ИНДУКЦИОННОГО КАРОТАЖА ДЛЯ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Рассмотрены отдельные вопросы математического обеспечения индукционного каротажа с использованием коаксиально-цилиндрической модели среды. В новой постановке рассмотрена одномерная прямая задача. Предложены новое представление решения в виде послойных вкладов токов в среде, а также аналитические выражения производных решения по параметрам цилиндрической модели. На этой основе предлагаются некоторые средства для анализа и инверсии. Рассмотрены быстрые алгоритмы для двухмерной задачи на основе линейных приближений.

Ключевые слова: индукционный электромагнитный каротаж, теория, цилиндрическая среда, борновское и доллевское приближение.

В зависимости от целей и задач каротажных индукционных зондирований при выборе методики и при интерпретации в качестве базовой рассматривают горизонтально-слоистую модель среды или цилиндрически-слоистую, которая формируется в процессе бурения, включает в себя тело прибора, а также позволяет оценить глубинность индукционных зондирований и исследовать зону проникновения. Эта модель, как и горизонтально-слоистая, имеет большое значение для методических изысканий и для базового проектирования методики и прибора. Конечно, в практической работе с уже выбранным инструментом крайне важны двухмерные и трехмерные модели. Такие модели реализуются в конкретных методиках (например, [5]). Здесь будут рассмотрены двухмерные цилиндрические модели, которые характерны для зоны проникновения.

Решение одномерной прямой задачи

Рассмотрим решение задачи о поле гармонического стороннего тока в цилиндрически-слоистой среде. Такого рода решения давно известны, сошлемся, например, на основательные работы [1] и [4].

Теперь предполагаем добавить новые элементы в постановку задачи и построить решение более компактным и прозрачным образом. Кроме того, это решение и его составляющие будем использовать для получения новых результатов – выражений для производных по параметрам модели и послыоного представления решения.

Итак, рассмотрим N -слойную среду (N цилиндрических границ – $r_i, i = 1, \dots, N$) (рис. 1). Прилегающая к оси среда имеет индекс 0, а внешняя среда – индекс N (удельные проводимости – $\sigma_i, i = 0, 1, \dots, N$). Повсюду магнитная проницаемость не отличается от проницаемости вакуума – μ_0). На одной из границ присутствует поверхностный гармонический ток с частотой ω , имеющий только азимутальную составляющую $j_\varphi(z)$, А/м.

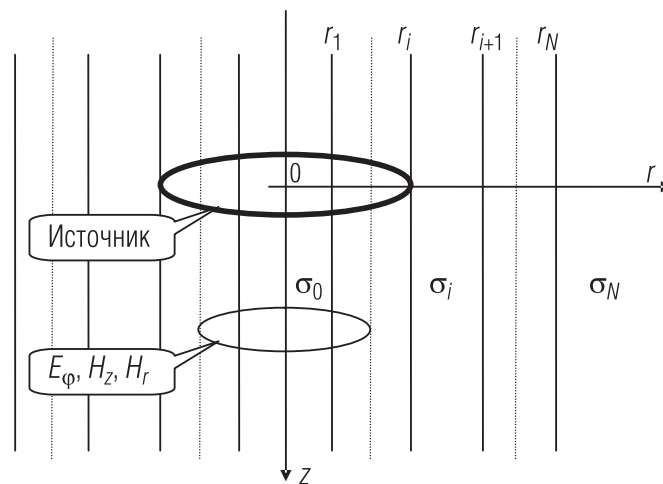


Рис. 1. Модель среды, источник и система координат

Автор использует подход к решению, который был применен в [2] в случае горизонтально-слоистой модели. Задача осесимметрична, и имеются только компоненты H_r, H_z, E_φ . Система уравнений Максвелла в цилиндрической системе координат примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} &= \sigma E_\varphi, \\ \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} &= -i\omega\mu_0 H_r, \quad \frac{1}{r} E_\varphi + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} = i\omega\mu_0 H_z, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

всюду, кроме границ. На простых границах непрерывны H_z и E_φ . На границе r_{tr} с током должны выполняться следующие условия:

$$[E_\varphi] = 0, [H_z] = j_\varphi. \quad (2)$$

Учитывая вид уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе, будем искать решение в виде (ток I сосредоточен на уровне $z = 0$):

$$\begin{aligned} E_\varphi &= \frac{i\omega\mu_0 I}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda z) R'(r) / u^2 \cdot d\lambda, \\ H_r &= \frac{I}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\lambda z) R'(r) \lambda / u^2 \cdot d\lambda, \\ H_z &= \frac{I}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\lambda z) R(r) d\lambda, \end{aligned} \quad (3)$$

где функция R удовлетворяет уравнению Бесселя:

$$r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r \frac{\partial R}{\partial r} - r^2 u^2 R = 0, \quad (4)$$

$$u_i = \sqrt{\lambda^2 - i\omega\mu_0\sigma_i} \text{ и}$$

$$R_i(r) = -A_i I_0 + B_i K_0(u_i r), \quad R'_i(r) = -A_i I_1 - B_i K_1(u_i r). \quad (5)$$

На границах непрерывны тангенциальные компоненты E_φ и H_z . Из физических соображений мы должны положить $B_0 = 0$, $A_N = 0$ (учитывая свойства модифицированных функций Бесселя). Выразив коэффициенты A и B через значения функции R и ее производной в i -м слое, имеем

$$\begin{aligned} A &= -urK_1(ur)R(r) - rK_0(ur)R'(r), \\ B &= -urI_1(ur)R(r) - rI_0(ur)R'(r). \end{aligned} \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) позволяют вычислить значения R и R' на верхней границе слоя через значения на нижней и обратно, то есть организовать рекуррентный расчет. При $i = N$ (внешняя область, $r \geq r_N$)

$$R_N(r) = B_N K_0(u_N r), \quad R'_N(r) = -u_N B_N K_1(u_N r), \quad (7)$$

а при $i = 0$ (внутренняя область, $0 < r \leq r_1$)

$$R_0(r) = -A_0 I_0(u_0 r), \quad R'_0(r) = -u_0 A_0 I_1(u_0 r). \quad (8)$$

При переходе границы непрерывны R и R'/u^2 .

На границе с источником имеем условие перехода

$$[H_z]|_{r_{ii}} = I \cdot \delta(z), \text{ или } [R]|_{r_{tr}} = 1, [R'/u^2]|_{r_{tr}} = 0. \quad (9)$$

Собственно, решение почти уже построено. Формулы (5)–(6) позволяют пересчитывать значения функции и ее производной с дальней границы (с большим радиусом) на ближнюю и наоборот. Начинаем на внешней стороне последней (N) границы, где функцию и производную определяют формулы (7) с точностью до коэффициента B_N . Полагаем его пока равным 1, а решение обозначаем как $X(r)$. Мы “сшиваем” на границе с током (r_{tr}) результат пересчета с последней границы и пересчет от первой, пользуясь условиями (9), и определяем коэффициенты A_0 и B_N . Итак, выше источника имеем

$$\check{R}(r) = -\frac{\check{Y}_{tr}}{D_{tr}} \cdot \check{X}(r), r \geq r_{tr}, Y_{tr} = X'_{tr}/u^2, D_{tr} = \check{X}_{tr}\hat{Y}_{tr} - \check{X}_{tr}\check{Y}_{tr}, \quad (10)$$

и ниже источника

$$\hat{R}(r) = -\frac{\check{Y}_{tr}}{D_{tr}} \cdot \hat{X}(r), r \leq r_{tr}. \quad (11)$$

Акценты \check{X} и \hat{X} обозначают определение сверху, с последней границы, и соответственно снизу, с первой границы. Заметим, что $r \cdot D(r) = \text{const}$. Это пригодится при определении производных решения по параметрам модели (радиусам границ и сопротивлениям).

Решение получено. Численная реализация заключается, в основном, в вычислении интегралов (3). Проблема возникает при увеличении расстояния от источника до приемника по вертикали из-за осциллирующего фактора. Эта проблема решается путем изменения пути интегрирования в комплексной плоскости так, что осциллирующий фактор трансформируется в затухающий.

На рис. 2 демонстрируются примеры расчетов. Первая кривая – это сигнал (E_φ) на окружности радиусом 3 см от кольцевого тока радиусом 5 см в зависимости от z в однородной среде ($\rho = 10 \text{ Ом}\cdot\text{м}$). Вторая кривая – сигнал, когда внутри радиуса 5 см сопротивление среды равно 1 Ом·м. Наконец третья кривая описывает сигнал на оси, возбуждаемый в двухслойной среде ($\rho = 1, 10 \text{ Ом}\cdot\text{м}$) точечным

источником (вертикальным магнитным диполем). Сигналы приведены на рис. 2 к общему моменту.

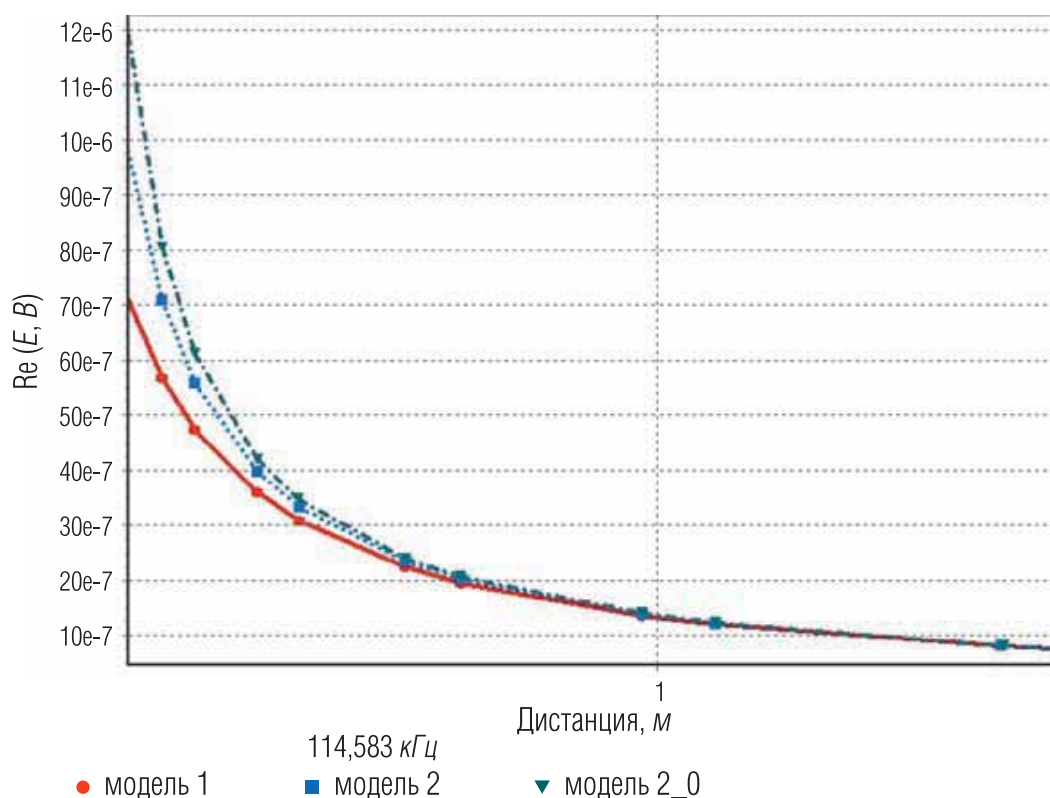


Рис. 2. Учет размеров катушек и внутренней среды

Производные поля по параметрам модели среды

Быстрый расчет производных – очень полезная возможность для анализа и инверсии данных. Между тем это несложно сделать в процессе решения прямой задачи. Возмущение границы и проводимости приводит к появлению дополнительного тока с плотностью $\Delta\sigma \cdot E_\varphi$. Учитывая выражение для E_φ (3), получим для i -й границы

$$\frac{\partial R}{\partial r_i} = i\omega\mu_0(\sigma_i - \sigma_{i-1}) \frac{\hat{Y}_{tr}\check{Y}_i\check{Y}_i}{D_{tr}D_i} \cdot \hat{X}(r), r_i > r_{tr}, r. \quad (12)$$

Заметим, $D_i = D_{tr} \cdot r_{tr}/r_i$.

В случае возмущения проводимости в i -м слое необходимо учесть дополнительный ток по всей толщине слоя, то есть проинтегрировать.

Имеем интеграл

$$\int rY Y dr = \frac{r^2}{2} \cdot (Y Y - X X / u^2) + r X Y / u^2,$$

так что для i -го слоя ($r_i \leq r \leq r_{i+1}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \sigma_i} &= i \omega \mu_0 \frac{\widehat{Y}_{tr} \cdot a_i}{D_{tr} D_{tr} r_{tr}} \cdot \widehat{X}(r), r_i > r_{tr}, r, \\ a_i &= \frac{r_{i+1}^2}{2} \cdot (\check{Y}_{i+1} \check{Y}_{i+1} - \check{X}_{i+1} \check{X}_{i+1} / u_i^2) + r_{i+1} \check{X}_{i+1} \check{Y}_{i+1} / u_i^2 - \\ &\quad - \frac{r_i^2}{2} \cdot (\check{Y}_i \check{Y}_i - \check{X}_i \check{X}_i / u_i^2) - r_i \check{X}_i \check{Y}_i / u_i^2, \\ a_0 &= \frac{r_1^2}{2} \cdot (\check{Y}_1 \check{Y}_1 - \check{X}_1 \check{X}_1 / u_0^2) + r_1 \check{X}_1 \check{Y}_1 / u_0^2, \\ a_N &= -\frac{r_N^2}{2} \cdot (\check{Y}_N \check{Y}_N - \check{X}_N \check{X}_N / u_N^2) - r_N \check{X}_N \check{Y}_N / u_N^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Можно также предложить приближенное линеаризованное решение прямой задачи в окрестности решения для фоновой (референтной) среды. С математической точки зрения предлагается разложение в ряд Тэйлора с сохранением только линейного члена. Итак,

$$R = R_0 + \sum_i^{N_r} \frac{\partial R_0}{\partial r_i} \cdot (r_i - r_{0i}) + \sum_i^{N_\sigma} \frac{\partial R_0}{\partial \sigma_i} \cdot (\sigma_i - \sigma_{0i}). \quad (14)$$

Формула (14) предлагает линеаризованное решение прямой одномерной задачи, но несложно обобщить это на трехмерные возмущения проводимости. Такие решения можно использовать для оперативной инверсии. Заметим, что это приближение соответствует известному в физике борновскому приближению, что в особенности применительно к трехмерному возмущению.

Вклады отдельных слоев

Если известно сложившееся распределение токов в слоистом пространстве (то есть $E_\varphi(r, z)$), то можно представить поле как су-

перпозицию полей токовых петель, расположенных в воздухе (среди уже учли, найдя распределение токов). Интегрируя по отдельным цилиндрическим слоям, можно представить решение (в области гармоник) в виде суммы вкладов от отдельных слоев:

$$\begin{aligned}
 R &= \sum_{i=0}^N R_i, \\
 R_i &= \frac{Y_{tr} \cdot a_i}{D_{tr} \tilde{D}_{rec} r_{rec}} \cdot F(r), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \\
 a_i &= r_{i+1}(Y_{i+1}F_{i+1} - X_{i+1}H_{i+1}) - r_i(Y_iF_i - X_iH_i), \\
 a_0 &= r_1(Y_1F_1 - X_1H_1), \quad a_N = -r_N(Y_NF_N - X_NH_N). \quad (15)
 \end{aligned}$$

Здесь используется решение для гармонической токовой петли в воздухе ($\sigma_i = 0$):

$$\tilde{R}(r) = -\frac{H_{tr}}{\tilde{D}_{tr}} \cdot F(r), \quad H = F' / \lambda^2, \quad \tilde{D}_{rec} = \tilde{F}_{rec} \hat{H}_{rec} - \hat{F}_{rec} \tilde{H}_{rec},$$

где функции F , H , D определены в воздухе на условных границах, соответствующих границам реальной среды.

Такое представление прямой задачи предоставляет дополнительные возможности для анализа эффективности электромагнитных каротажных зондирований. Однако наиболее интересным является то, что члены ряда в (15) R_i весьма устойчиво пропорциональны проводимостям соответствующих слоев. В таком случае можно представить решение для некоторой среды σ в некоторой окрестности референтной среды σ_0 в виде

$$R(\sigma) = \sum_{i=0}^N \sigma_i \cdot \frac{R_i(\sigma_0)}{\sigma_{0i}}. \quad (16)$$

Таким образом, получено новое линеаризованное приближенное решение прямой задачи. Это приближение переходит в доллевское при $\omega \rightarrow 0$, и оно является некоторым обобщением доллевского приближения. Обобщение состоит в том, что до некоторой степени учитывается скин-эффект, поскольку используется полное решение для референтной модели. Ценность этого результата состоит в том, что, как показывают численные эксперименты, это приближение работает много лучше, чем традиционное борновское приближение (14).

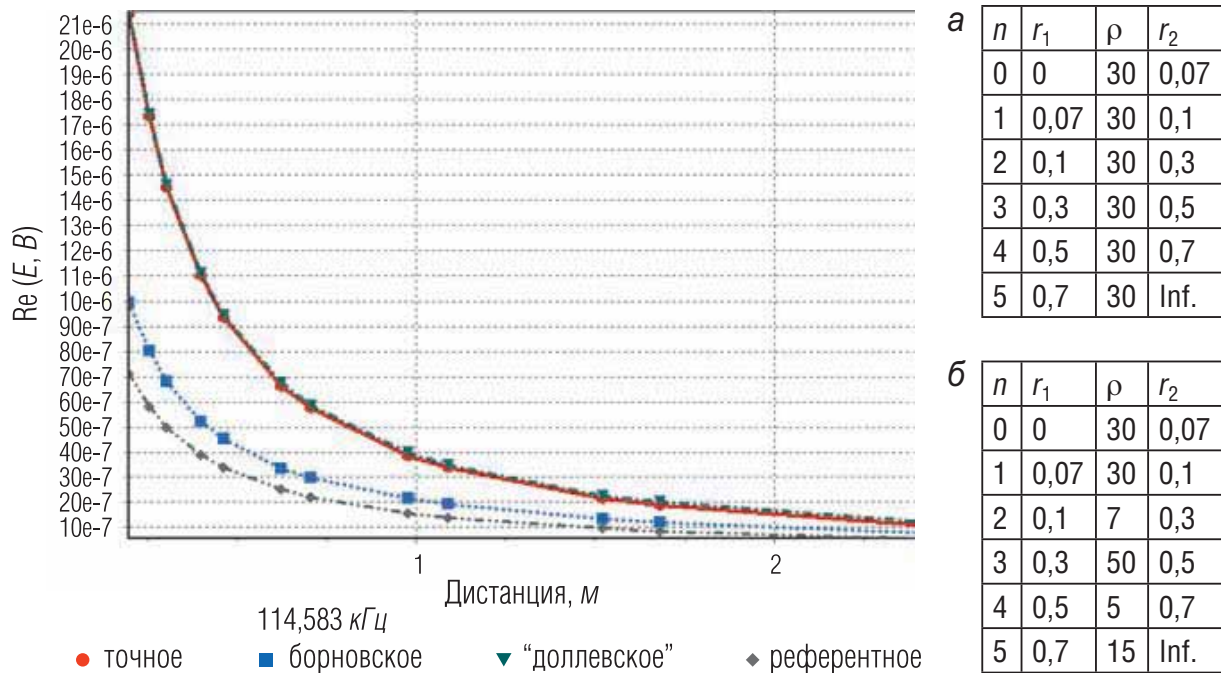


Рис. 3. Приближенные решения прямой задачи

На рис. 3 приведено сравнение точного расчета и полученного по линейризованным формулам (14) и (16) для 5-слойной цилиндрической среды, представленной на рис. 3 в виде таблицы (б). Здесь же описана референтная среда (а) (просто однородное пространство с сопротивлением 30 Ом·м). Точный расчет и “доллевский” совпадают визуально. Результат, конечно, впечатляющий – сопротивление 4-го слоя, например, в 6 раз отличается от сопротивления референтной среды. Что касается борновского приближения, то оно дает существенно отличающийся результат, и кривая ближе к кривой для референтной модели, нежели к точному расчету. В расчетах источник и приемник располагались на первых двух границах ($r_1 = 0,07$ м, $r_2 = 0,1$ м).

Такое линейризованное представление прямой задачи (16), действительное в довольно широком диапазоне параметров относительно референтной модели, дает возможность для оперативной инверсии данных, например для быстрого формирования стартовой модели для дальнейшей, более точной инверсии. Эта возможность была проверена, и на рис. 4 представлен пример такой инверсии. При этом не задавались положения границ, а определялось распределение удельных проводимостей тонкослойной среды. Синтетические данные (8 частот и 12 положений приемника) были сгенерированы для среды, представленной на рис. 3, б. Референтная (начальная)

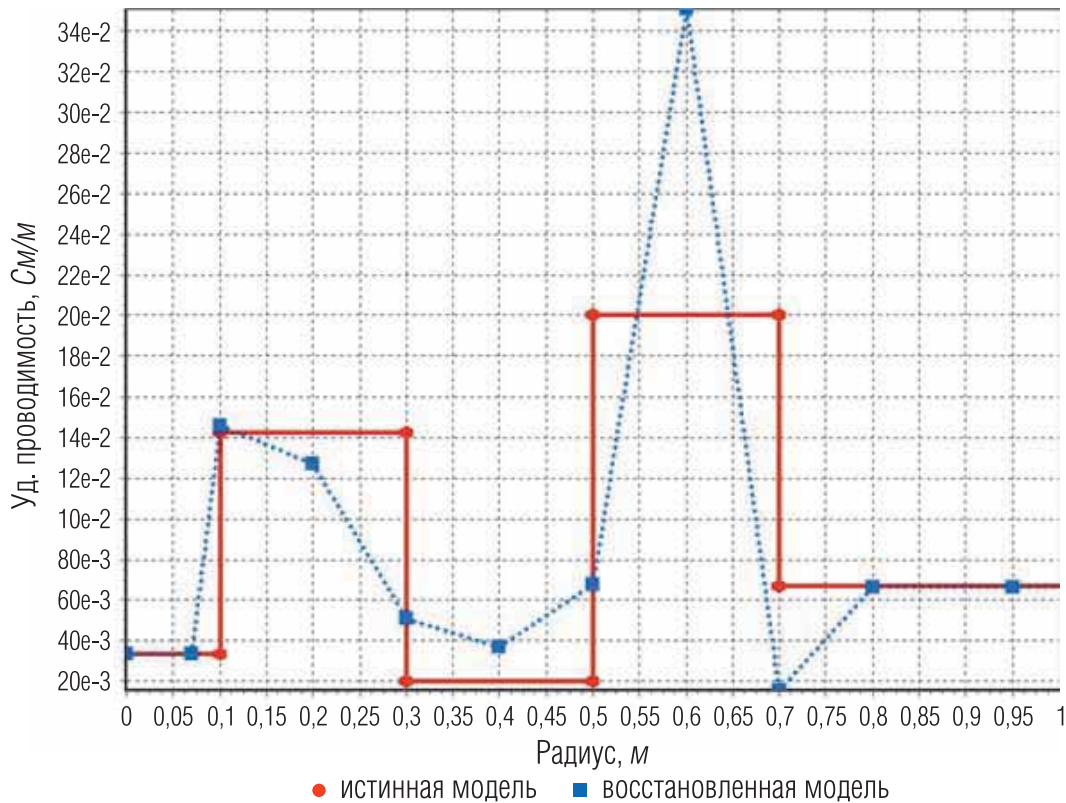


Рис. 4. Восстановление радиального распределения проводимости

среда – однородное пространство с сопротивлением 30 Ом·м. На рис. 4 представлено сравнение кривых удельной проводимости для фактической модели (к которой относятся данные) и полученное в результате инверсии распределение удельной проводимости тонко-слоистой среды в зависимости от радиуса.

Представляет интерес выяснить соотношение между линейными приближениями (14) и (16). Запишем борновское приближение при возмущении проводимости j -го слоя, используя точную формулу (15) разложения полного поля по вкладам от слоев. Тогда

$$R_B = R_0 + (\sigma - \sigma_j) \cdot \frac{\partial R}{\partial \sigma_j} = R_0 + (\sigma - \sigma_j) \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\sum_{i=0}^N R_i \right), \quad (17)$$

или

$$\begin{aligned} R_B &= R_0 + (\sigma - \sigma_j) \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\sum_{i=0}^N \sigma_i \frac{R_i}{\sigma_i} \right) = \\ &= R_0 + (\sigma - \sigma_j) \cdot \frac{R_j}{\sigma_j} + (\sigma - \sigma_j) \cdot \left[\sum_{i=0}^N \sigma_i \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{R_i}{\sigma_i} \right) \right]. \end{aligned}$$

Но

$$R_0 + (\sigma - \sigma_j) \cdot \frac{R_j}{\sigma_j} = \sum_{i=0}^N \sigma_i \frac{R_i}{\sigma_i} + (\sigma - \sigma_j) \cdot \frac{R_j}{\sigma_j}$$

есть “доллевское” приближение согласно формуле (16) при возмущении одного j -го слоя от σ_j до σ . Так что получим соотношение между борновским (R_B) и “доллевским” (R_D) приближением в случае возмущения удельной проводимости j -го в виде

$$R \cong R_B = R_D + \Delta\sigma_j \cdot \left[\sum_{i=0}^N \sigma_i \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \left(\frac{R_i}{\sigma_i} \right) \right]. \quad (18)$$

Итак, вышеприведенные выражения отличаются малым членом. Малость определяется производными от “почти констант” R_i/σ_i . Однако, как показывают численные эксперименты, этот член быстро разрушает борновское приближение с увеличением возмущений, и предпочтительнее его не учитывать, то есть перейти к “доллевскому”. Это существенно дополняет результаты, приведенные в работе [3].

Двухмерная модель

Линеаризованные приближения (14) и (16) для одномерной среды могут быть развиты для двухмерной модели. Если референтная модель одномерная, то мы получим вполне оперативные процедуры.

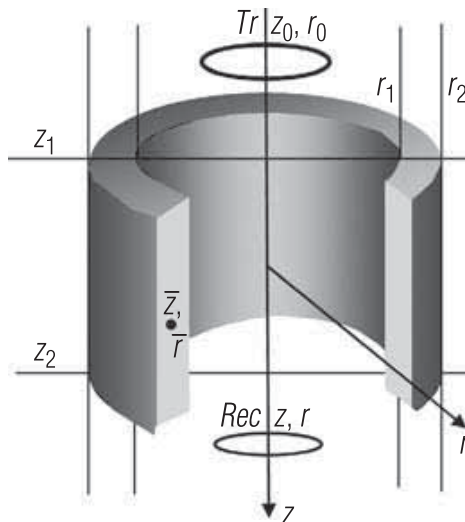


Рис. 5. Двухмерная неоднородность

С математической точки зрения задача несколько усложнится. В одномерном случае влияние или возмущение проводимости слоя можно учесть в области пространственных гармоник. Можно было работать с одномерной граничной задачей для функции R , а затем вернуться в физическую область по формулам (3). В двухмерном случае область по радиусу ограничена, и предлагается учесть объемные источники (токи) сразу в физическом пространстве (рис. 5).

Итак, рассчитаем полное поле, рассматривая двухмерное включение как возмущение проводимости $\Delta\sigma$, в виде

$$E_{\varphi} \cong E_{\varphi}^0 + \Delta E_{\varphi}, \quad (19)$$

где E_{φ}^0 – нормальное поле референтной одномерной среды, а

$$\Delta E_{\varphi}(r, z) = \frac{i\omega\mu_0}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} \Delta j_{\varphi}(\bar{r}, \bar{z}) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \cos[\lambda(\bar{z} - z)] R'(\bar{r}, r) / u^2 d\lambda \right\} d\bar{r} d\bar{z}, \quad (20)$$

где

$$\Delta j_{\varphi}(\bar{r}, \bar{z}) = \Delta\sigma \cdot E_{\varphi}^0(\bar{r}, \bar{z}) = \Delta\sigma \cdot \frac{i\omega\mu_0 I}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos[\lambda(z_0 - \bar{z})] R'(r_0, \bar{r}) / u^2 d\lambda. \quad (21)$$

Можно интегрировать по \bar{r} , \bar{z} в выражение (20) аналитически, и задача сводится к двукратному численному интегрированию по пространственным гармоникам. Приближение состоит в том, что в выражении для дополнительного тока (21) полное поле заменяется на нормальное. Это и есть борновское приближение. Выражение (19) можно представить в виде

$$E_{\varphi} \cong E_{\varphi}^0 + \Delta\sigma \cdot G_B, \quad (22)$$

где функцию G_B можно рассматривать как производную по проводимости от нормального поля в выделенной области (или как борновский геометрический фактор). Этот подход использовался в работе [3].

Что касается другого линеаризованного представления (которое автор условно называет “доллевским”), то оно строится аналогично, только теперь рассматриваем не возмущение, а полный вклад всех токов в области

$$\Delta E_{\varphi}(r, z) = \frac{i\omega\mu_0}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} j_{\varphi}(\bar{r}, \bar{z}) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \cos[\lambda(\bar{z} - z)] F'(\bar{r}, r) / \lambda^2 d\lambda \right\} d\bar{r} d\bar{z}, \quad (23)$$

где функция F определена для воздуха, а

$$j_{\varphi}(\bar{r}, \bar{z}) = \sigma_0 \cdot E_{\varphi}^0(\bar{r}, \bar{z}) = \sigma_0 \cdot \frac{i\omega\mu_0 I}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos[\lambda(z_0 - \bar{z})] R'(r_0, \bar{r}) / u^2 d\lambda, \quad (24)$$

или вклад в сигнал от области есть

$$\Delta E_{\varphi} \cong \Delta\sigma \cdot G_D. \quad (25)$$

Теперь приближение состоит в том, что рассматривается любое σ (но в некоторой окрестности значения референтной среды – σ_0), а G_D – “доллевский” геометрический фактор.

Формула (25) дает вклад токов в кольцевом объекте. Полное поле есть

$$E_{\varphi} \cong E_{\varphi}^0 + \Delta\sigma \cdot G_D, \quad (26)$$

что по форме совпадает с (22), но геометрический фактор определен иначе.

Заключение

В данной работе рассмотрены несколько математических фактов в связи с использованием цилиндрически-слоистой модели в индукционном каротаже. Конечно, автор посчитал важным привести некоторые новые элементы (неточечные источники и приемники, расчет производных по параметрам модели, “послойное” представление решения). Это не исчерпывающий математический аппарат, но эти решения дополняют возможности моделирования и инверсии. Отмечен важный на взгляд автора результат – линеаризованное представление решения прямой задачи, отличное от известного борновского. Это линеаризованное решение можно рассматривать как обобщение “доллевского” приближения, и оно весьма эффективно.

Линеаризации при адекватной численной реализации дают интересные возможности для анализа и инверсии каротажных электромагнитных данных. Может быть, для одномерной инверсии это не так важно, поскольку в этом случае широкодоступны достаточно быстрые точные процедуры, но линеаризации возможны и для структур более высокой размерности, а это имеет большое значение. В практической работе с уже выбранным инструментом крайне важны двухмерные и трехмерные модели, для которых привлекаемые “строгие” вычис-

лительные процедуры на основе конечно-разностных (конечно-элементных) методов чрезвычайно ресурсоемки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дмитриев В. И.* Осесимметричное электромагнитное поле в цилиндрически-слоистой среде // Известия АН СССР. Физика Земли. 1972. № 11.
2. *Могилатов В. С., Потапов В. В.* Универсальное математическое обеспечение для индукционного каротажа // НТВ “Каротажник”. Тверь: Изд. АИС. 2014. Вып. 12 (246). С. 76–90.
3. *Могилатов В. С., Эпов М. И.* Томографический подход к интерпретации данных геоэлектромагнитных зондирований // Физика Земли. 2000. № 1. С. 78–86.
4. *Табаровский Л. А., Каганский А. М., Эпов М. И.* Электромагнитное поле гармонического источника в анизотропной цилиндрически-слоистой среде // Геология и геофизика. 1976. № 3.
5. Технология исследования нефтегазовых скважин на основе ВИКИЗ / Под ред. М. И. Эпова, Ю. Н. Антонова. Новосибирск: Институт геофизики СО РАН, 2000. 120 с.

Рецензент доктор техн. наук, проф. Л. Е. Кнеллер