

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКОВОГО КОНТУРА, РАСПОЛОЖЕННОГО НА ОСИ СЛОИСТОГО ПРОВОДЯЩЕГО МАГНИТНОГО ЦИЛИНДРА

М.И. Эпов, Г.М. Морозова, В.С. Могилатов, Е.Ю. Антонов

Институт геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Коптюга, 3, Россия

Дано решение задачи о нестационарном электромагнитном поле токового контура в проводящей магнитной цилиндрически-слоистой среде методом, предложенным академиком А. Н. Тихоновым для горизонтально-однородного полупространства, а также спектральным способом. Создана единая программа численной реализации задачи, объединившая оба алгоритма. Исследованы зависимости нестационарной ЭДС от параметров модели, соответствующей многоколонной конструкции.

Нестационарное электромагнитное поле, удельное электрическое сопротивление, ферромагнетика, магнитная проницаемость, собственные значения, собственные функции.

THE TEM FIELD OF A CURRENT LOOP CENTERED ON THE AXIS OF A CONDUCTING CYLINDRICAL LAYERED MAGNET

M.I. Epov, G.M. Morozova, V.S. Mogilatov, and E.Yu. Antonov

The TEM problem for a current loop centered on the axis of a conducting cylindrical layered magnet is solved using uniform codes that join Tikhonov's method for horizontally homogeneous half-space and the method of separation of variables. The behavior of transient emf is investigated as a function of model parameters simulating multistring well casing.

Transient electromagnetic field, resistivity, ferromagnet, magnetic permeability, eigen value, eigen function

ВВЕДЕНИЕ

Широкий интерес к разработке и применению электромагнитной дефектоскопии связан с необходимостью проведения контроля за техническим состоянием металлических колонн скважин, призванного обеспечить определение степени изношенности стенок колонны, выявление местоположения муфт, локальных дефектов, зон перфорации.

Разрабатываемый нами метод электромагнитной дефектоскопии и прибор основаны на воздействии на стенки колонны переменным магнитным полем от токового импульса с последующей регистрацией переходного процесса, фиксируемого в приемном контуре. Характер измеряемого нестационарного сигнала зависит от перечисленных свойств колонны, а также ее электромагнитных параметров и температуры.

Очевидно, что для правильного истолкования результатов измерений и построения интерпретационной системы необходимы алгоритмические и программные средства прямого математического моделирования.

Зондовая часть прибора включает три соосные с колонной катушки (две питающие и одна измерительная), позволяющие регистрировать полный и дифференциальный сигналы. Отсюда следует физико-математическая модель для постановки и решения прямых задач.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что на оси вертикального цилиндра расположен круглый контур с током J , лежащий в горизонтальной плоскости. При малых размерах контура его можно заменить вертикальным магнитным диполем с моментом $M = JS$, где S — площадь контура. Введем цилиндрическую систему координат $\{r, \varphi, z\}$. Начало координат совместим с диполем. Ось z совпадает с осью цилиндра и направлена вниз. Постоянный ток J , текущий в контуре, в момент $t = 0$ выключается. Необходимо определить нестационарное электромагнитное поле, возникшее внутри цилиндра, в его стенке и во внешней области. Стенка цилиндра состоит из нескольких слоев, отличающихся магнитной проницаемостью и электропроводностью (рис. 1). Сначала будем рассматривать цилиндр с двухслойной стенкой, а затем запишем решение для общего случая. Рассмотрим пространство, состоящее из трех областей: внутреннего цилиндра ($r \leq r_1$), слоистой цилиндрической оболочки ($r_1 \leq r \leq r_3$) и внешней среды ($r \geq r_3$).

© М.И. Эпов, Г.М. Морозова, В.С. Могилатов, Е.Ю. Антонов, 2003

Рис. 1. Модель среды и установки.

Поскольку удельное электрическое сопротивление металлической колонны примерно на 6—7 порядков меньше удельного сопротивления вмещающей слабомагнитной среды, то электропроводности внутреннего цилиндра и внешней среды можно считать пренебрежимо малыми, а их абсолютные магнитные проницаемости равными магнитной постоянной μ_0 .

Для модели с однослойной стенкой решение задачи приведено в работе [1]. Учитывая симметрию задачи, запишем уравнения Максвелла для компонент поля, отличных от нуля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} &= \sigma E_\varphi, \\ \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} &= \mu \dot{H}_r, \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi) = -\mu \cdot \dot{H}_z, \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot H_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем точка над функцией означает производную по времени.

Отделяя с помощью Фурье-преобразования координату z , представим компоненты электромагнитного поля в виде

$$E_\varphi = \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\infty F(r, t, \lambda) \cos(\lambda z) d\lambda, \quad (2)$$

$$H_r = \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\infty R(r, t, \lambda) \sin(\lambda z) d\lambda, \quad (3)$$

$$H_z = \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\infty Z(r, t, \lambda) \cos(\lambda z) d\lambda. \quad (4)$$

Здесь учтено, что компоненты E_φ и H_z симметричны относительно z , а H_r — антисимметрична.

Подставляя выражения (2)—(4) в (1), получим в каждой из цилиндрических областей следующую систему для Фурье образов F, R, Z :

$$\lambda R - Z'_r = \sigma F, \quad (5)$$

$$-\lambda F = \mu \dot{R}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rF) = -\mu \dot{Z}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rR) = \lambda Z. \quad (8)$$

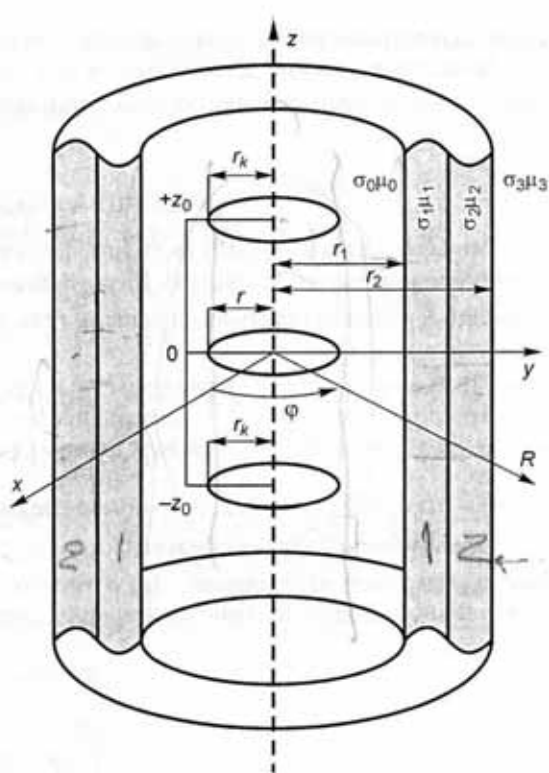
Сформулируем краевую задачу для Фурье-образа нормальной по отношению к поверхностям раздела компоненты R .

Из (5)—(8) получаем уравнение

$$R''_{rr} + \frac{1}{r} R'_r - \frac{1+\lambda^2 r^2}{r^2} R = \mu \sigma \dot{R} \quad (9)$$

и граничные условия

$$[\mu R] = 0, [R + rR'_r] = 0 \text{ при } r = r_1; r = r_3, z = z_2' \quad (10)$$



Здесь квадратные скобки обозначают скачок функции на границе.

Начальное условие заключается в том, что поле в начальный момент времени ($t = 0$) равно полю постоянного магнитного диполя в рассматриваемой среде. При $r \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$ амплитуда поля стремится к нулю.

РЕДУКЦИЯ К ЗАДАЧЕ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

Решаем задачу (9)—(10) методом, предложенным А. Н. Тихоновым [2] и развитым для горизонтально-слоистых сред в статье [3]. Для отделения переменной t положим $R(r, t) = X(r) \cdot e^{-\alpha t}$ и будем искать функцию R в виде суперпозиции решений такого вида. Для функции $X(r)$ получаем следующую краевую задачу:

$$r^2 X''_{rr} + r X'_r + (m_i^2 r^2 - 1)X = 0, \quad 0 \leq r \leq \infty, \quad r \neq r_1, r_2, r_3; \quad (11)$$

$$[\mu X] = 0, \quad [X + r X'_r] = 0, \quad r = r_1, (r_2, r_3), \quad (12)$$

где $m_i^2 = \alpha \mu_i \sigma_i - \lambda^2$, $i = 0, 1, 2, 3$ — номер среды, $X \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Ограничим эту задачу областью стенки цилиндра ($r_1 \leq r \leq r_3$) путем сопряжения значений функции и ее производной на границах. Для этого воспользуемся явным видом зависимости решения от пространственной координаты вне проводящих стенок цилиндра:

$$X^{(0)}(r) = X^{(0)}(r_1) \frac{I_1(\lambda r)}{I_1(\lambda r_1)}, \quad r \leq r_1, \quad (13)$$

$$X^{(2)}(r) = X^{(2)}(r_3) \frac{K_1(\lambda r)}{K_1(\lambda r_3)}, \quad r \geq r_3, \quad (14)$$

Здесь и в дальнейшем I_0, I_1, K_0, K_1 — модифицированные функции Бесселя и Макдональда нулевого и первого порядков.

Принимая во внимание (13) и (14) и исходя из условия (12) в области $r_1 \leq r \leq r_3$, получаем для X задачу типа Штурма — Лиувилля:

$$\begin{aligned} r^2 X''_{rr} + r X'_r - (m_i^2 r^2 - 1)X &= 0, \quad r_1 \leq r \leq r_3, \\ X + r_1 X'_r &= a_1 X, \quad r = r_1, \\ X + r_3 X'_r &= -a_2 X, \quad r = r_3, \end{aligned} \quad (15)$$

где $a_1 = \frac{\mu_1}{\mu_0} \lambda r_1 \frac{I_0(\lambda r_1)}{I_1(\lambda r_1)}$, $a_2 = \frac{\mu_2}{\mu_0} \lambda r_3 \frac{K_0(\lambda r_3)}{K_1(\lambda r_3)}$, $m_i^2 = \alpha \mu_i \sigma_i - \lambda^2$.

Общее решение уравнения (15) есть функция $X = A \cdot J_1(m_i r) + B \cdot N_1(m_i r)$, являющаяся собственной функцией задачи Штурма—Лиувилля, а α — ее собственным значением. Здесь J_0, J_1, N_0, N_1 — функции Бесселя и Неймана нулевого и первого порядков.

Согласно теории задачи Штурма—Лиувилля имеется дискретное множество собственных значений и собственных функций. Запишем общее решение для функции R_i

$$R_i^{(i)}(r, t) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j X_j^{(i)}(m_{ij}) e^{-\alpha_j t}, \quad (16)$$

где $\alpha_j = \frac{m_{ij}^2 + \lambda^2}{\mu_i \sigma_i}$, $m_{ij}^2 = \alpha_j \mu_i \sigma_i - \lambda^2$.

Чтобы найти рекуррентное выражение для собственной функции $X(m_{ij} r_i)$, выпишем уравнения связи на поверхностях раздела сред с отличными электромагнитными параметрами μ_i, σ_i .

$$X_0(m_{0j} r_1) = \frac{\mu_1}{\mu_0} X_1(m_{1j} r_1), \quad (17)$$

$$X_0(m_{0j} r_1) + r_1 X'_{0r}(m_{0j}) = X_1(m_{1j}) + r_1 X'_{1r}(m_{1j});$$

$$X_1(m_{1j} r_2) = \frac{\mu_2}{\mu_1} X_2(m_{2j} r_2), \quad (18)$$

$$X_1(m_{1j} r_2) + r_2 X'_{1r}(m_{0j}) = X_2(m_{2j}) + r_2 X'_{2r}(m_{2j});$$

$$X_2(m_{2j} r_3) = \frac{\mu_0}{\mu_2} X_3(m_{3j} r_3); \quad (19)$$

$$X_2(m_{2j} r_3) + r_2 X'_{2r}(m_{2j}) = X_3(m_{3j}) + r_3 X'_{3r}(m_{3j}).$$

Функцию $X_1(m_{1j} r) + r X'_{1r}(m_{1j} r)$, входящую в уравнения связи, можно преобразовать к виду

$$X_1^{(i)}(m_{1j} r) + r X'_{1r}(m_{1j} r) = m_{1j} r \cdot X_1^{(0)}(m_{1j} r) = m_{1j} r \cdot X \cdot [A_i \cdot J_0(m_{1j} r) + B_i \cdot N_0(m_{1j} r)], \quad (20)$$

$$X_1(m_{1j} r) + r X'_{1r}(m_{1j} r) = A_i \cdot J_1(m_{1j} r) + B_i \cdot N_1(m_{1j} r). \quad (21)$$

В слое с индексом $i = 2$ коэффициенты A_2 и B_2 можно выразить через значения собственной функции и ее пространственной производной на внешней границе $r = r_3$ и на границе $r = r_2$ и затем установить связь между собственными функциями на этих границах. Для функции X_i и ее пространственной производной имеем:

$$X_2(m_{2j} r_2) = X_2(m_{2j} r_3) \cdot \xi_2 + X'_{2r}(m_{2j} r_3) \cdot \xi_2^*, \quad (22)$$

$$X'_{2r}(m_{2j} r_2) = X_2(m_{2j} r_3) \cdot \zeta_2 + X'_{2r}(m_{2j} r_3) \cdot \zeta_2^*, \quad (23)$$

$$\text{где } \zeta_2 = \frac{\alpha_2 [1 - \pi/2 \cdot N_1(m_{2j} r_3) \cdot \alpha_3] / J_1(m_{2j} r_3) + \alpha_3 [1 + \pi/2 \cdot N_1(m_{2j} r_2) \cdot \alpha_2] / J_1(m_{2j} r_2)}{r_2 [-1 + \pi \cdot m_{2j} r_2 \cdot N_1(m_{2j} r_2) \cdot J_0(m_{2j} r_2)]},$$

$$\xi_2^* = \frac{r_3 \frac{J_1(m_{2j} r_3)}{J_1(m_{2j} r_2)} [-1 + \pi/2 \cdot N_1(m_{2j} r_2) \cdot \alpha_2] - \pi/2 \cdot N_1(m_{2j} r_3) \cdot \alpha_2}{r_2 [-1 + \pi \cdot m_{2j} r_2 \cdot N_1(m_{2j} r_2) \cdot J_0(m_{2j} r_2)]},$$

$$\alpha_2 = J_1(m_{2j} r_2) - m_{2j} r_2 J_0(m_{2j} r_2), \quad \alpha_3 = J_2(m_{2j} r_3) - m_{2j} r_3 J_0(m_{2j} r_3),$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\alpha_2} [\alpha_3 - r_2 J_1(m_{2j} r_2) \cdot \zeta_2], \quad \xi_2^* = \frac{1}{\alpha_2} [r_3 J_1(m_{2j} r_3) - r_2 J_1(m_{2j} r_2) \cdot \zeta_2^*].$$

Таким образом, получены выражения (22) и (23) для собственной функции и ее пространственной производной на границе r_2 через значения функции и ее производной на границе r_3 . По условию (18) на поверхности r_2 можно перейти к функциям в следующем слое $X_1(m_{1j} r_2)$, $X'_{1r}(m_{1j} r_2)$:

$$X_1(m_{1j} r_2) = \frac{\mu_2}{\mu_1} X_2(m_{2j} r_2),$$

$$X'_{1r}(m_{1j} r_2) = \frac{1}{r^2} X_2(m_{2j} r_2) \left[1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right] + X'_{2r}(m_{2j} r_2). \quad (24)$$

Затем, используя уравнения (22) и (23), в которые вместо аргументов $m_2 r_3$, $m_2 r_2$ и параметров r_3 , r_2 нужно подставить соответственно $m_1 r_2$, $m_1 r_1$ и r_2 , r_1 , получим функции $X_1(m_{1j} r_1)$, $X'_{1r}(m_{1j} r_1)$, выраженные через собственные функции на внешней границе. Условия связи (17) позволяют найти собственную функцию и ее пространственную производную в области с индексом $i = 0$ внутри цилиндра. Описанная процедура повторяется столько раз, сколько имеется слоев.

Теперь необходимо определить собственную функцию на внешней границе. Для этого используем краевое условие на внешней границе $X + r_3 X'_r = -a_2 X$.

С точностью до постоянного множителя получим:

$$X_2(m_{2j} r_3) = - [N_0(m_{2j} r_3) + a_2 N_1(m_{2j} r_3)] \cdot J_1(m_{2j} r_3) +$$

$$+ [J_0(m_{2j} r_3) + a_2 J_1(m_{2j} r_3)] \cdot N_1(m_{2j} r_3) = A_2 J_1(m_{2j} r_3) + B_2 N_1(m_{2j} r_3). \quad (25)$$

Постоянный множитель будет учтен при нахождении коэффициентов C_j .

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Для определения собственных чисел воспользуемся краевыми условиями и условиями связи на внутренних границах. При этом мы получим систему для определения коэффициентов A_j , B_j . Чтобы она имела нетривиальное решение, ее определитель должен быть равен нулю. Приравняв определитель системы к нулю, получим трансцендентное уравнение для определения собственных чисел α_j .

$$D = [J_0(m_{1j} r_1) - a_1 J_1(m_{1j} r_1)] \cdot [N_0(m_{2j} r_3) + a_2 N_1(m_{2j} r_3)] \times$$

$$\begin{aligned} & \times [\mu_1 N_1(m_{1j} r_2) J_0(m_{2j} r_2) + \mu_2 J_1(m_{2j} r_2) N_0(m_{1j} r_2)] + [J_0(m_{2j} r_3) + a_2 J_1(m_{2j} r_3)] \times \\ & \times [\mu_2 N_1(m_{2j} r_2) N_0(m_{1j} r_2) + \mu_1 N_1(m_{1j} r_2) N_0(m_{2j} r_2)] + [N_0(m_{1j} r_1) - a_1 N_1(m_{1j} r_1)] \times \\ & \times [N_0(m_{2j} r_3) + a_2 N_1(m_{2j} r_3)] \cdot [\mu_1 J_1(m_{1j} r_2) J_0(m_{2j} r_2) + \mu_2 J_1(m_{2j} r_2) J_0(m_{1j} r_2)] + \\ & + [J_0(m_{2j} r_3) + a_2 J_1(m_{2j} r_3)] \cdot [\mu_2 N_1(m_{2j} r_2) J_0(m_{1j} r_2) + \mu_1 J_1(m_{1j} r_2) N_0(m_{2j} r_2)]. \end{aligned}$$

Корни этого уравнения будут составлять множество собственных чисел.

ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ И УДОВЛЕТВОРЕНИЕ НАЧАЛЬНОМУ УСЛОВИЮ

Коэффициенты C_j в (16) должны быть определены так, чтобы удовлетворялось начальное условие

$$\bar{R}(r) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j X_j(r) \cdot e^{-\alpha_j r} \Big|_{t=0}. \quad (26)$$

Здесь $\bar{R}(r)$ — стационарное решение задачи.

Для определения коэффициентов C_j воспользуемся ортогональностью функции $\sqrt{r} X_j$. Так что, умножая (26) на $r X_j(m_{ij} r)$ и интегрируя в пределах от r_1 до r_3 , получим

$$C_j = \frac{\int_{r_1}^{r_3} r \bar{R}(\lambda r) X(m_{ij} r) dr}{\int_{r_1}^{r_3} r X^2(m_{ij} r) dr}. \quad (27)$$

Интеграл в числителе (27) представим в виде суммы

$$\int_{r_1}^{r_3} r \bar{R}(\lambda r) X(m_{ij} r) dr = \int_{r_1}^{r_2} r \bar{R}_1(\lambda r) X_1(m_{ij} r) dr + \int_{r_2}^{r_3} r \bar{R}_2(\lambda r) X_2(m_{ij} r) dr,$$

где $X_1 = A_1 J_1(m_{1j} r) + B_1 N_1(m_{1j} r)$, $X_2 = A_2 J_1(m_{2j} r) + B_1 N_1(m_{2j} r)$, $\bar{R}_1 = A_1^* I_1(\lambda r) + B_1^* K_1(\lambda r)$, $\bar{R}_2 = A_2^* J_1(\lambda r) + B_2^* K_1(\lambda r)$.

Коэффициенты во внешнем слое (в нашем случае A_2 и B_2) определены уравнением (25). Тогда из условий связи на поверхности r_2 (18) выразим коэффициенты A_1 и B_1 , через A_2 и B_2 .

$$\begin{aligned} A_1 = & -\frac{\pi m_{1j} r_2}{2} \left\{ A_2 \left[\frac{\mu_2}{\mu_1} J_1(m_{2j} r_2) N_0(m_{1j} r_2) - \frac{m_{2j}}{m_{1j}} N_1(m_{1j} r_2) J_0(m_{2j} r_2) \right] + \right. \\ & \left. + B_2 \left[\frac{\mu_2}{\mu_1} N_1(m_{2j} r_2) N_0(m_{1j} r_2) - \frac{m_{2j}}{m_{1j}} N_1(m_{1j} r_2) N_0(m_{2j} r_2) \right] \right\}, \\ B_1 = & -\frac{\pi m_{1j} r_2}{2} \left\{ A_2 \left[\frac{\mu_2}{\mu_1} J_1(m_{2j} r_2) J_0(m_{1j} r_2) - \frac{m_{2j}}{m_{1j}} J_1(m_{1j} r_2) J_0(m_{2j} r_2) \right] + \right. \\ & \left. + B_2 \left[\frac{\mu_2}{\mu_1} N_1(m_{2j} r_2) J_0(m_{1j} r_2) - \frac{m_{2j}}{m_{1j}} J_1(m_{1j} r_2) N_0(m_{2j} r_2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Уравнения (28) по сути являются рекуррентными для определения коэффициентов A_i , B_i во внутренних слоях стенки цилиндра. Теперь можем воспользоваться результатами [1] и записать для модели n -слойной стенки:

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} r \bar{R} \cdot X(m_{1j} r) dr &= \sum_{i=1}^N \int_{r_i}^{r_{i+1}} r \bar{R}_i(\lambda r) X_i(m_{1j} r) dr = \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ A_i A_i^* \frac{\lambda r J_1(m_{1j} r) I_0(\lambda r) - m_{1j} r J_0(m_{1j} r) I_1(\lambda r)}{m_{1j}^2 + \lambda^2} \Big|_{r_i}^{r_{i+1}} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + B_1 A_i^* \frac{\lambda r N_1(m_{1j} r) I_0(\lambda r) - m_{1j} r \cdot N_0(m_{1j} r) I_1(\lambda r)}{m_{1j}^2 + \lambda^2} |r_{i+1}^- - \\
& - B_i^* A_i^* \frac{\lambda r J_1(m_{1j} r) K_0(\lambda r) - m_{1j} r J_0(m_{1j} r) K_1(\lambda r)}{m_{1j}^2 + \lambda^2} |r_{i+1}^- - \\
& - B_1 B_i^* \frac{\lambda r N_1(m_{1j} r) K_0(\lambda r) - m_{1j} r N_0(m_{1j} r) K_1(\lambda r)}{m_{1j}^2 + \lambda^2} |r_{i+1}^-.
\end{aligned} \quad (29)$$

Функция \bar{R} , входящая в (26), (27), (28) (стационарное решение), удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{aligned}
r^2 \bar{R}_{rr}^{11} + r \bar{R}_r^1 - (\lambda^2 r^2 + 1) \bar{R} &= 0, & 0 < r < \infty; \\
[\mu \bar{R}] = 0, & [\bar{R} + r \bar{R}_r^1] = 0, & r = r_i; \\
\bar{R} \rightarrow -K_1(\lambda r) \lambda^2, & & r \rightarrow 0; \\
\bar{R} \rightarrow 0, & & r \rightarrow \infty.
\end{aligned} \quad (30)$$

Из дифференциального уравнения (30) следует вид решения $\bar{R} = A^* I_1(\lambda r) + B^* K_1(\lambda r)$, а уравнения связи позволяют написать неоднородную систему для определения неизвестных коэффициентов A_i^* , B_i^* .

Интеграл в знаменателе (29), норма функции $X_j(m_{1j} r)$, берется в явном виде [4]. Учитывая краевые условия, а также то, что для функций $X_j(m_{1j} r)$ имеют место соотношения, как для функций Бесселя

$$X'_{0r}(m_j r) = -m_j X(m_j r), \quad X'_{1r}(m_j r) = \left[X_0(m_j r) - \frac{1}{m_j r} X \right] \cdot m_j,$$

будем иметь

$$\begin{aligned}
& \int_{r_1}^{r_2} r X^2(m_{1j} r) dr = \int_{r_1}^{r_2} r X_1^2(m_{1j} r) dr + \int_{r_2}^{r_3} r X_2^2(m_{2j} r) dr = \\
& = \left[\frac{r_1^2}{2m_{1j}^2 r_1^2} X_1^2(m_{1j} r_1) (m_{1j}^2 r_1^2 + a_1^2 - 2a_1) \right] - \left[\frac{r_3^2}{2m_{2j}^2 r_3^2} X_2^2(m_{2j} r_3) (m_{2j}^2 r_3^2 + a_2^2 - 2a_2) \right] + \\
& + \frac{r_2^2}{2} \left\{ X_1^2(m_{1j} r_2) \left[1 - \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} \right] + X_{10}^2(m_{1j} r_2) \left[1 - \frac{m_{1j}^2}{m_{2j}^2} \right] - \frac{2}{r_2} X_{1,0}(m_{1j} r_2) X_1(m_{1j} r_2) \left[\frac{1}{m_{1m_j}} - \frac{1}{m_j} \cdot \frac{m_{1j}}{m_{2j}} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2} \right] \right\}.
\end{aligned} \quad (31)$$

Таким образом, все функции, входящие в выражение (16), для Фурье-образа R определены, что позволяет записать решение для отличных от нуля компонент нестационарного электромагнитного поля, пользуясь уравнениями (2)–(8).

Итак, внутри стенок металлического цилиндра решение найдено. В соответствии с условием (10) на поверхностях раздела, во внутренней полости цилиндра ($1 \leq r_1$) Фурье-образ R_0 имеет вид

$$R_0 = \bar{\mu} \sum_{j=0}^{\infty} C_j \frac{X(k_j r_1)}{I_1(\lambda r_1)} I_1(\lambda r) e^{-\alpha_j t}.$$

Тогда, например, ЭДС в приемном контуре радиусом r , расположенном на оси цилиндра, при возбуждении поля выключением тока J в питающем контуре радиусом r_k , описывается выражением

$$\varepsilon = 2J \mu_1 r r_k \int_0^{\infty} \frac{I_1(r_k \lambda) I_1(r \lambda) \cos(\lambda z)}{I_1(\lambda r_1)} \sum_{j=0}^N C_j \alpha_j X_{1j}(m_{1j} r_1) e^{-\alpha_j t} d\lambda. \quad (32)$$

Здесь собственные числа α_j имеют размерность (1/секунду), все остальные функции, стоящие под знаком интеграла, — безразмерные.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Как следует из вида решения задачи во временной области (32) при вычислительных процедурах возникают трудности численной реализации решения на малых временах из-за медленной сходимости ряда в этом временном отрезке. Поэтому был также использован способ вычисления неустановившихся полей по их спектрам, использованный для вычислений нестационарного электромагнитного поля в цилиндрически-слоистых средах в работе [5].

Следуя [6] и [7], временная функция, описывающая нестационарный процесс при выключении постоянного тока в источнике равна

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} d\omega.$$

В работе [8] получены скалярные рекуррентные функции для цилиндрически-слоистой среды. В интересующем нас случае спектральная функция

$$F(\omega) = i\omega\mu r r_k \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-p_1 I_0(p_1 r_k) I_1(p_1 r) \frac{K_0(p_1 r_1)}{I_0(p_1 r_1)} \varphi_1 \right] e^{-i\lambda z} d\lambda, \quad (33)$$

где φ_1 рассчитывается по рекуррентной формуле:

$$\Pi_n = \frac{\mu_n p_{n+1}}{\mu_{n+1} p_n} \cdot \frac{\Psi_{n+1} + 1}{\Psi_{n+1} \frac{I_0'(p_{n+1} r_n)}{I_0(p_{n+1} r_n)} + \frac{K_0'(p_{n+1} r_n)}{K_0(p_{n+1} r_n)}}, \quad \Phi_n = \frac{1 - \Pi_n \frac{K_0'(p_n r_n)}{K_0(p_n r_n)}}{1 - \Pi_n \frac{I_0'(p_n r_n)}{I_0(p_n r_n)}}$$

$$\Psi_n = -\frac{I_0(p_n r_{n-1}) K_0(p_n r_n)}{K_0(p_n r_{n-1}) I_0(p_n r_{n-1})}, \quad \Psi_{n+1} = 0, \quad p_n = \sqrt{\lambda^2 - i\omega\mu_n \sigma_n}.$$

Здесь $I_0(x)$, $K_0(x)$ — модифицированные функции Бесселя, $I_0'(x)$, $K_0'(x)$ — производные функций Бесселя по аргументу.

Рекурсивная процедура вычисления φ_n начинается с внешнего слоя и направлена в сторону убывания n .

АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММА ДЛЯ РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОГО СИГНАЛА

Как уже отмечалось, при численном моделировании по первому способу возникают трудности при достижении необходимой точности на ранних временах, но на поздних временах ряд в выражении (32) быстро сходится и расчеты по этим формулам обеспечивают высокую точность. Обратная картина имеется при расчетах по спектральному способу. Здесь из-за осцилляций синус- или косинус-функций не удастся добиться высокой точности на поздних временах. Поэтому при численном моделировании была создана единая программа расчета неустановившихся полей в цилиндрически-слоистых средах, объединившая в себе оба метода, принявшая в себя достоинства каждого и исключившая их недостатки. На рис. 2 приведены участки кривой спада ЭДС в цилиндрической трехслойной среде. На рисунке видны искажения на ранних и поздних временах. На ранних временах лучше работает алгоритм, основанный на спектральном методе, на поздних — более точным является тихоновское решение. В средней части отклонение кривых не превышает 0,01 %.

Вместе с тем программы по первому и второму способам расчета имеют и самостоятельное значение. Способ решения непосредственно во временной области накладывает ограничение на модель. Внутренняя и внешняя среды должны быть непроводящими. Решение с использованием преобразования Фурье спектральной функции, в рамках одномерной постановки задачи, не накладывает каких-либо дополнительных ограничений на параметры модели. Поэтому первый способ позволяет изучить особенности поведения нестационарного поля при тонкой структуре стенки колонны, а второй, например, в модели среды, отвечающей многоколонной конструкции, когда непроводящие слои чередуются с проводящими.

Отсюда следует, что разработанные программы позволяют изучать поведение нестационарного электромагнитного поля в проводящих магнитных и немагнитных одномерных цилиндрически-слоистых моделях сред. Для более ясного понимания физики нестационарного процесса в проводящей ферромагнитной колонне было рас-

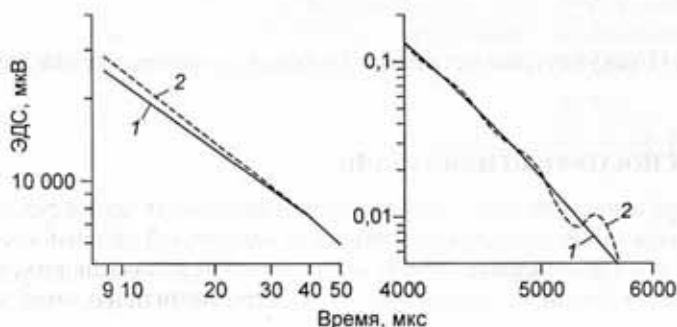


Рис. 2. Сравнение точности численного моделирования в двух способах решения задачи.

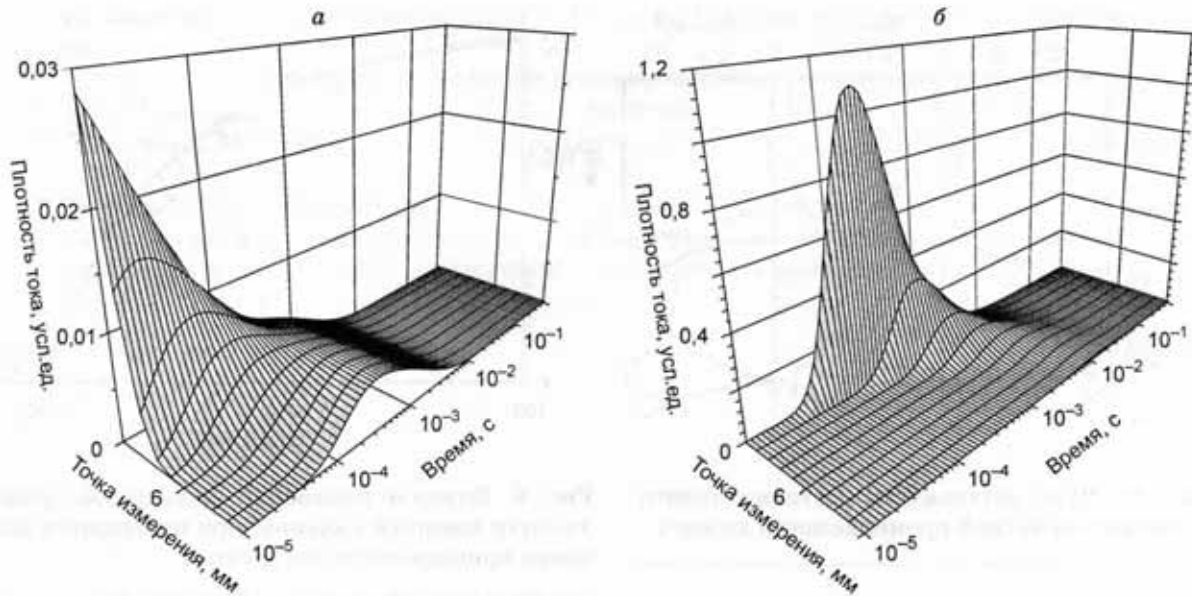


Рис. 3. Распределение плотности тока в колоннах:

a — в немагнитной, *б* — в магнитной.

считано распределение плотности тока в стенке магнитного цилиндра. На рис. 3 показана трехмерная картина распределения плотности тока в стенках немагнитного и магнитного цилиндров при одинаковой их интегральной проводимости. В немагнитном цилиндре (см. рис. 3, *a*) значительная доля тока достигает внешней поверхности стенки цилиндра и ток может растекаться в примыкающую среду, если она проводящая. В магнитном цилиндре ток сосредоточен вблизи внутренней поверхности стенки и внутренняя колонна в многоколонной конструкции выступает, в значительной мере, как экран. Но в отличие от постоянного поля в нестационарном токи индуцируются и во внешней колонне, а их начальное состояние определяется соотношением магнитных проницаемостей цилиндров в стационарной задаче.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ В МНОГОКОЛОННОЙ КОНСТРУКЦИИ

Рассмотрим влияние на измеряемый сигнал параметров колонн в двухколонной конструкции. На рис. 4, *a, б* показана чувствительность сигнала $\eta \left(\eta = \frac{d \ln \epsilon}{d \ln S} \right)$ к интегральной проводимости S_1 (внутренней) и S_2 (внешней) колонн. В соответствии с законом Фарадея на ранних временах имеется наибольшая чувствительность к S_1 , а на поздних — к S_2 . Однако и в среднем временном интервале участки наибольшей чувствительности к S_1 соответствуют минимальной чувствительности к S_2 . Эта особенность зависимости нестационарного поля от параметров модели будет учтена при построении систем интерпретации каротажных диаграмм.

Характер изменения во времени чувствительности к параметрам S_1 и S_2 сохраняет основные черты при изменении абсолютных величин S_1 и S_2 , но вся картина сдвигается в сторону больших или меньших времен при соответственно увеличении или уменьшении интегральной проводимости. С изменением соотношения меж-

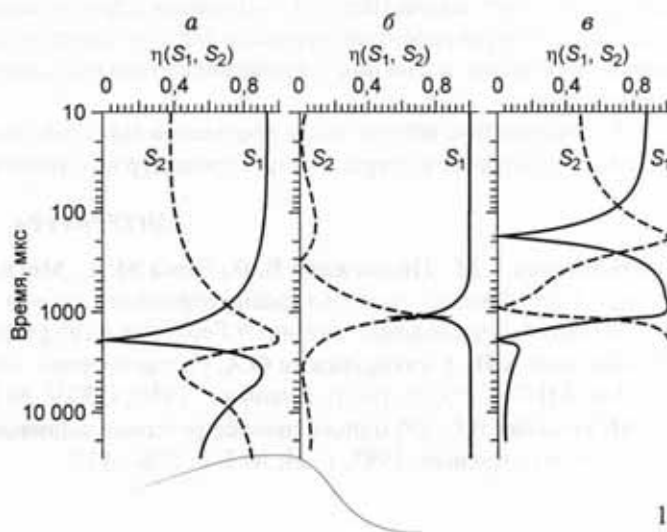


Рис. 4. Чувствительность нестационарного сигнала к продольным проводимостям внутренней и внешней колонн:

a — $S_1 = S_2$, *б* — $S_1 > S_2$, *в* — $S_1 < S_2$.

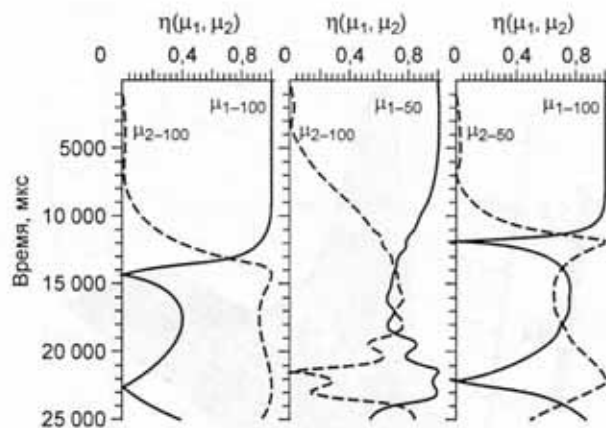


Рис. 5. Чувствительность нестационарного сигнала к магнитной проницаемости колонн.

ду S_1 и S_2 принципиальная картина чувствительности измеряемого сигнала к этим параметрам не меняется (см. рис. 4,б).

Чувствительность нестационарного сигнала к магнитной проницаемости колонн показана на рис. 5. Магнитный параметр второй колонны (ее магнитная проницаемость) оказывает слабое влияние на поле вплоть до 10 мс, т. е. вторая колонна ведет себя как немагнитная, при равных магнитных проницаемостях колонн. Количественные показатели демонстрируются на графиках (см. рис. 5). Значительное влияние магнитных свойств материала первой колонны, как видно из рис. 5, сохраняется до поздних времен. Следовательно, для получения достоверных данных о геометрических параметрах колонн важно иметь однородную по магнитным свойствам первую колонну, или владеть способами определения ее магнитной проницаемости.

Как видно из рис. 4 и 5, наиболее благоприятный участок времени для определения толщины стенки внутренней колонны — это ранние времена.

Одна из практических сторон проведенного численного анализа заключается в решении вопроса об условиях выделения и определении параметров второй колонны. На рис. 6 приведены кривые спада ЭДС при меняющемся значении S_2 . Как видно, заметное влияние второй колонны начинается с 10 мс. Например, здесь имеется пятикратное увеличение сигнала при внесении второй колонны с $S_1 = S_2$. Принятая в расчетах проводимость $S_1 = 40\,000$ См соответствует 10 мм толщине стенки колонны и удельному сопротивлению металла $2,5 \cdot 10^{-7}$ Ом·м.

ВЫВОДЫ

1. Решение краевой задачи для нестационарного электромагнитного поля сведено к проблеме собственных значений задачи Штурма—Лиувилля, сформулированной для пространственных гармоник.
2. Получены рекуррентные формулы для собственных функций в модели многослойного цилиндра. Решение задачи для магнитного проводящего многослойного цилиндра получено в замкнутой интегральной форме.
3. Разработанные алгоритмы и программа моделирования нестационарного сигнала будут использоваться для построения итерационных процедур интерпретации экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозова Г.М., Польшгалов В.Ф., Эпов М.И., Могилатов В.С. Нестационарное электромагнитное поле токового контура, расположенного на оси полого проводящего магнитного цилиндра (решение и приложения задачи) // Геология и геофизика, 1999, т. 41, № 11, с. 1490—1498.
2. Тихонов А.Н., Скугаревская О.А. О становлении электрического тока в неоднородной среде II // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1950, т. XIV, № 4, с. 281—293.
3. Могилатов В.С. Об одном способе решения основной прямой задачи электроразведки ЗС // Геология и геофизика, 1993, т. 34, № 3, с. 108—117.

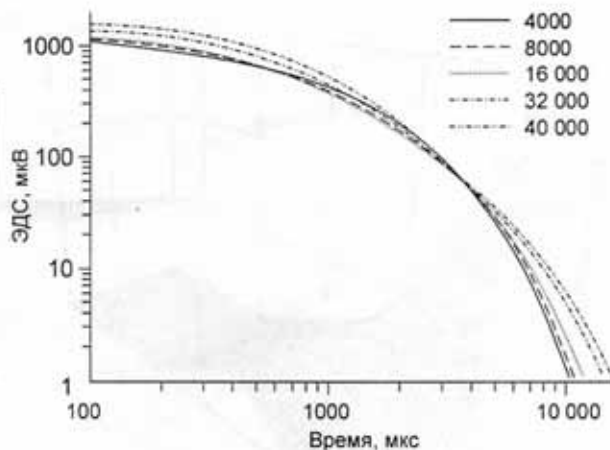


Рис. 6. Влияние изменения продольной проводимости внешней колонны при постоянном значении проводимости внутренней.

Диаметр колонны: внутренней — 146 мм, внешней — 219 мм. Шифр кривых — продольная проводимость внешней колонны (См).

4. **Справочник по специальным функциям** / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М., Наука, 1979, 830 с.
5. **Потапов А.П., Кнеллер Л.Е.** Численное решение задачи становления магнитного диполя в скважинах многоколонной конструкции // НТВ „Каротажник“, 1999, вып. 52, с. 76—83.
6. **Шейнман С.М.** Об установлении электромагнитных полей в земле // Прикладная геофизика, 1947, вып. 3, с. 3—55.
7. **Ваньян Л.Л.** Основы электромагнитных зондирований. М., Недра, 1965, 105 с.
8. **Табаровский Л.А.** Электромагнитные поля поперечно-электрического и поперечно-магнитного типа в многослойных средах // Электромагнитные методы исследования скважин. Новосибирск, Наука, 1979, с. 225—233.

Рекомендована к печати 23 мая 2002 г.
С.В. Гольдиным

Поступила в редакцию
25 декабря 2001 г.