

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКОВОГО КОНТУРА, РАСПОЛОЖЕННОГО НА ОСИ ПОЛОГО ПРОВОДЯЩЕГО МАГНИТНОГО ЦИЛИНДРА (решение и приложения задачи)

Г. М. Морозова, В. Ф. Полыгалов*, М. И. Эпов, В. С. Могилатов

Институт геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Коптюга, 3, Россия

** Нижневарттовскнефтегеофизика, 626440, Тюменская обл., Нижневарттовск, 6, д/я 219*

Дано решение задачи о нестационарном электромагнитном поле токового контура в проводящей, магнитной, цилиндрически-слоистой среде методом, предложенным академиком А. Н. Тихоновым для горизонтально-однородного полупространства. Исследованы зависимости нестационарной ЭДС от параметров модели. Рассмотрены приложения задачи в области дефектоскопии обсадных металлических колонн нефтегазовых скважин и для оценки механических напряжений в околоскважинной геологической среде.

Нестационарное электромагнитное поле, электросопротивление, ферромагнетики, магнитная проницаемость.

TRANSIENT ELECTROMAGNETIC FIELD OF CURRENT CIRCUIT LOCALIZED ON THE AXIS OF A HOLLOW MAGNETIC CYLINDER (solution of the problem and applications)

G. M. Morozova, V. F. Polygalov, M. I. Epov, and V. S. Mogilatov

This paper presents solution of the problem of the transient electromagnetic field of current circuit in a conducting cylindrical magnetic layered medium by the method proposed by Academician A. N. Tikhonov for a horizontally homogeneous half-space. We have investigated the dependencies of transient emf on the model parameters and considered applications to the study problem in magnetic-field testing of metallic casings of petroleum wells and in estimating stresses in the geological medium around the well.

Transient electromagnetic field, electric resistivity, ferromagnet, magnetic permeability

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

Одна из актуальных задач инженерной промышленной геофизики состоит в эффективном контроле за техническим состоянием обсадных колонн скважин, подверженных техногенным и геологическим воздействиям. Для их решения созданы электромагнитные дефектоскопы [1, 2]. Их практическое применение показало трудности в распознавании дефектов, обусловленных механическими повреждениями и связанных с изменением физических свойств материала колонны.

Металлические колонны, изготовленные из ферромагнитных материалов, обладают высокой электрической проводимостью ($\sigma \approx 10^{-7}$ 1/Ом·м) и высокой магнитной проницаемостью ($\mu \approx 100 - 1000 \cdot \mu_0$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная). Поэтому в области теории актуальна задача об изучении нестационарного электромагнитного поля в цилиндрически-слоистых проводящих магнитных средах. Эта задача важна как для изучения физических свойств самого вещества обсадных колонн, так и при последующей постановке и теоретической оценке влияния дефектов колонн на нестационарное электромагнитное поле, а также мониторинге технического состояния колонн.

Известно, что намагниченность ферромагнетиков зависит от прикладываемых механических напряжений (магнитоупругий эффект). Величина и знак изменения намагниченности зависят от

типа ферромагнетика, напряженности магнитного поля и от знака магнитострикции для данного материала. В монокристаллических телах существует также зависимость от угла между вектором напряженности магнитного поля и главными осями симметрии кристалла.

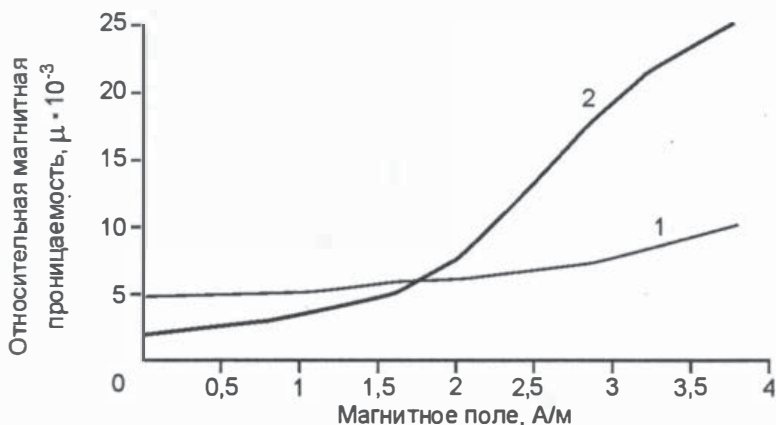
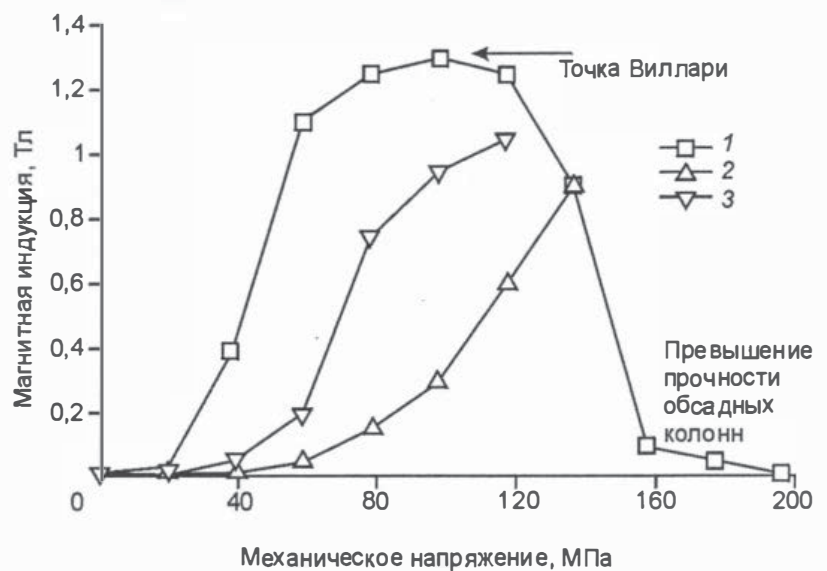


Рис. 1. Зависимость магнитной проницаемости от прикладываемых механических напряжений.

1 — нулевое, 2 — 24,5 МПа.

Рис. 2. Связь механических напряжений с магнитной индукцией.

1 — при повышении напряжения, 2, 3 — при понижении.



Пример изменения магнитной проницаемости ферромагнетиков в зависимости от внешнего магнитного поля при упругом растяжении приведен на рис. 1 [3]. Эксперименты на металлах [4] показали, что, если на материал с положительной магнитострикцией действует возрастающее по величине натяжение, то индукция при постоянном магнитном поле возрастает до тех пор, пока натяжение не превзойдет предел упругости. Эта зависимость при напряженности намагничивающего поля $H \approx 8$ А/м показана на рис. 2 [4]. С достижением предела упругости, когда увеличение напряжения приводит к пластическим деформациям, индукция начинает уменьшаться (эффект Виллари). Отметим, что величины напряженности магнитного поля в приведенном эксперименте невелики, а приложенные механические напряжения не превосходили предела прочности металлических труб, который меняется в зависимости от состава сплава в пределах от 150 до 700 МПа.

Следовательно, существующие естественные механические напряжения в горных породах, превосходящие в некоторых случаях предел прочности металлических труб, могут вызывать значительные изменения намагниченности металлических колонн нефтегазовых скважин даже в слабых магнитных полях, например, в постоянном магнитном поле Земли. Металлическую колонну можно рассматривать как датчик, изменение магнитной проницаемости которого отражает изменение существующего поля механических напряжений во внешней среде. При определенных условиях, связанных со знаком магнитострикции для данного сплава и направлением прикладываемого напряжения, уменьшение магнитной проницаемости может свидетельствовать о том, что напряжения достигли критической величины и упругие деформации металла переходят в пластические.

Таким образом, решение прямой задачи электромагнитных зондирований связано с фундаментальной проблемой оценки напряженного состояния геологической среды.

Как известно, динамические характеристики ферромагнетиков зависят от свойств самого вещества и от электродинамических свойств намагничиваемого тела [5]. Первые определяются природой и взаимодействием носителей магнитного момента, создающих намагниченность, а также структурой ферромагнетиков и ее изменением при намагничивании (например, магнитоупругий эффект). Вторые обусловлены особенностями пространственного распределения переменного электромагнитного поля. В частности, вследствие скин-эффекта намагниченность неравномерно распределена по поперечному сечению колонны.

Изучение вариаций магнитной проницаемости металлических колонн, их электрических свойств и геометрических параметров предлагается проводить путем измерения нестационарной ЭДС в проводящем контуре радиусом r . Нестационарное электромагнитное поле возбуждается путем выключения постоянного тока, текущего в контуре радиуса r_k , соосном с приемным. При этом оба контура размещены в металлической колонне с внутренним r_1 и внешним r_2 радиусами.

На колонну воздействуют два магнитных поля: постоянное намагничивающее поле Земли T и высокочастотное нестационарное H . В дальнейшем создаваемое нестационарное поле рассматривается с двух позиций: его влияния на процесс намагничивания и как характеристику изменения магнитной проницаемости колонны.

Решение задачи проводится в предположении, что свойства самого вещества (магнитная проницаемость, удельное электросопротивление) остаются постоянными, а магнитная индукция и напряженность магнитного поля связаны линейной зависимостью:

$$B = \mu_0(\chi + 1) H = J + \mu_0 H = \mu H.$$

Здесь χ — магнитная восприимчивость, J — намагниченность, μ — абсолютная магнитная проницаемость вещества.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что на оси вертикального цилиндра расположен соосный контур с током j . Контур лежит в горизонтальной плоскости. При малых размерах контура его можно заменить вертикальным магнитным диполем с моментом $M = j \cdot S$, где S — площадь контура. Введем цилиндрическую систему координат $\{r, \varphi, z\}$. Начало координат совместим с диполем. Ось z совпадает с осью цилиндра и направлена вниз. Постоянный ток амплитудой j , текущий в контуре, в момент $t = 0$ выключается. Все пространство состоит из трех областей: внутреннего цилиндра $r \leq r_1$, цилиндрической оболочки $r_1 \leq r \leq r_2$ и внешней среды $r \geq r_2$.

Поскольку удельное электрическое сопротивление металлической колонны примерно на 6—7 порядков меньше удельного сопротивления вмещающей слабомагнитной среды, то электропроводности внутреннего цилиндра и внешней среды можно считать пренебрежимо малыми, а их абсолютные магнитные проницаемости равными магнитной постоянной μ_0 .

Учитывая симметрию задачи, запишем уравнения Максвелла для компонент поля, отличных от нуля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} &= \sigma E_\varphi, \\ \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} &= \mu \dot{H}_r, \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi) = -\mu \cdot \dot{H}_z, \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot H_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем точка над функцией означает производную по времени.

Отделяя с помощью Фурье-преобразования координату z , представим компоненты электромагнитного поля в виде:

$$E_\varphi = \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\infty F(r, t, \lambda) \cdot \cos(\lambda z) d\lambda, \quad (2)$$

$$H_r = \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\infty R(r, t, \lambda) \cdot \sin(\lambda z) d\lambda, \quad (3)$$

$$H_z = \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\infty Z(r, t, \lambda) \cdot \cos(\lambda z) d\lambda. \quad (4)$$

Здесь учтено, что компоненты E_φ и H_z симметричны относительно z , а H_r — антисимметрична.

Подставляя выражения (2)—(4) в (1), получим в каждой цилиндрической области 0, 1, 2 следующую систему для Фурье-образов F, R, Z .

$$\lambda R - Z_r' = \sigma F, \quad (5)$$

$$-\lambda F = \mu \dot{R}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rF) = -\mu \dot{Z}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rR) = \lambda Z. \quad (8)$$

Поставим краевую задачу для Фурье-образа нормальной по отношению к поверхностям раздела компоненты R .

Из (5)—(8) получаем уравнение

$$R_{rr}'' + \frac{1}{r} R_r' - \frac{1 + \lambda^2 r^2}{r^2} R = \mu \sigma \dot{R} \quad (9)$$

и граничные условия

$$[\mu R] = 0, \quad [R + r \cdot R_r'] = 0, \quad \text{при } r = r_1; r = r_2. \quad (10)$$

Здесь квадратные скобки обозначают скачок функции на границе.

Начальное условие заключается в том, что поле при $t = 0$ равно полю постоянного магнитного диполя в среде. При $r \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$ амплитуда поля стремится к нулю.

РЕДУКЦИЯ К ЗАДАЧЕ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

Решаем задачу (9)—(10) методом, предложенным А. Н. Тихоновым для горизонтально-слоистых сред [6].

Для отделения переменной t полагаем $R(r, t) = X(r) \cdot e^{-\alpha t}$ и будем искать R в виде суперпозиции решений такого вида.

Для функции $X(r)$ получаем следующую краевую задачу:

$$r^2 X_{rr}'' + r X_r' + (m_i^2 r^2 - 1) X = 0, \quad 0 \leq r \leq \infty, \quad r \neq r_1, r_2, \quad (11)$$

$$[\mu X] = 0, \quad [X + r X_r'] = 0, \quad r = r_1, r_2, \quad (12)$$

где $m_i^2 = \alpha \mu_i \sigma_i - \lambda^2$, $i = 0, 1, 2$ — номер среды, $X \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Ограничим эту задачу областью самого цилиндра ($r_1 \leq r \leq r_2$) путем сопряжения значений функции и ее производной на границах. Для этого воспользуемся явным видом зависимости решения от пространственной координаты вне проводящего цилиндра:

$$X^{(0)}(r) = X^{(0)}(r_1) \cdot \frac{I_1(\lambda r)}{I_1(\lambda r_1)}, \quad r \leq r_1, \quad (13)$$

$$X^{(2)}(r) = X^{(2)}(r_2) \cdot \frac{K_1(\lambda r)}{K_1(\lambda r_2)}, \quad r \geq r_2. \quad (14)$$

Здесь и в дальнейшем I_0, I_1, K_0, K_1 — модифицированные функции Бесселя и Макдональда нулевого и первого порядков.

Исходя из условий (12), получим:

$$X^{(1)} + r_1 (X^{(1)})_1' = X^{(0)} + r_1 (X^{(0)})_r',$$

$$\frac{X^{(0)}(r_1)}{I_1(\lambda r_1)} [I_1(\lambda r_1) + r_1 I_{1r}'(\lambda r_1)] = \frac{\mu_1 \lambda r_1}{\mu_0} \frac{I_0(\lambda r_1)}{I_1(\lambda r_1)} \cdot X^{(1)}(r_1), \quad r = r_1,$$

$$X^{(1)} + r_2 (X^{(1)})_r' = X^{(2)} + r_2 (X^{(2)})_r',$$

$$\frac{X^{(2)}(r_2)}{K_1(\lambda r_2)} [K_1(\lambda r_2) + r_2 K_{1r}'(\lambda r_2)] = -\frac{\mu_1 \lambda r_2}{\mu_0} \frac{K_0(\lambda r_2)}{I_1(\lambda r_2)} \cdot X^{(1)}(r_2), \quad r = r_2.$$

Таким образом, в области $r_1 \leq r \leq r_2$ получаем задачу Штурма—Лиувилля для X :

$$r^2 X_{rr}'' + \frac{1}{r} X_r' - (m_1^2 r^2 - 1) X = 0, \quad r_1 \leq r \leq r_2,$$

$$X + r_1 X_r' = a_1 X, \quad r = r_1, \quad (15)$$

$$X + r_2 X_r' = -a_2 X, \quad r = r_2,$$

где $a_1 = \frac{\mu_1 \lambda r_1}{\mu_0} \frac{I_0(\lambda r_1)}{I_1(\lambda r_1)}$, $a_2 = \frac{\mu_1 \lambda r_2}{\mu_0} \frac{K_0(\lambda r_2)}{K_1(\lambda r_2)}$, $m_1^2 = \alpha \mu_1 \sigma_1 - \lambda^2$.

Общее решение уравнения (15) есть $X = A \cdot J_1(m_1 r) + B \cdot N_1(m_1 r)$. Здесь J_0, J_1, N_0, N_1 — функции Бесселя и Неймана нулевого и первого порядков. Причем

$$X + r X_r' = (A \cdot J_0(m_1 r) + B \cdot N_0(m_1 r)) \cdot m_1 r = X^{(0)} \cdot m_1 r.$$

Из (12) имеем систему для определения неизвестных коэффициентов A и B :

$$m_1 r_1 \cdot [A \cdot J_0(m_1 r_1) + B \cdot N_0(m_1 r_1)] - a_1 \cdot [A \cdot J_1(m_1 r_1) + B \cdot N_1(m_1 r_1)] = 0,$$

$$m_1 r_2 \cdot [A \cdot J_0(m_1 r_2) + B \cdot N_0(m_1 r_2)] + a_2 \cdot [A \cdot J_1(m_1 r_2) + B \cdot N_1(m_1 r_2)] = 0. \quad (16)$$

Для определения собственных чисел воспользуемся равенством нулю определителя однородной системы (16):

$$\begin{aligned} & \left[j_0(m_1 r_1) - \frac{a_1}{m_1 r_1} \cdot J_1(m_1 r_1) \right] \cdot \left[N_0(m_1 r_2) + \frac{a_2}{m_1 r_2} \cdot N_1(m_1 r_2) \right] - \\ & - \left[J_0(m_1 r_2) + \frac{a_2}{m_1 r_2} \cdot J_1(m_1 r_2) \right] \cdot \left[N_0(m_1 r_1) - \frac{a_1}{m_1 r_1} \cdot N_1(m_1 r_1) \right] = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\bar{a}_1 = \bar{\mu} \frac{\lambda}{k} \frac{I_0(\lambda r_1)}{I_1(\lambda r_1)}$, $\bar{a}_2 = \bar{\mu} \frac{\lambda}{k} \frac{K_0(\lambda r_2)}{K_1(\lambda r_2)}$, $\bar{\mu} = \frac{\mu_1}{\mu_0}$ — относительная магнитная проницаемость.

Система (17) имеет бесконечное множество решений. Собственные значения (обозначим их k_j) и собственные функции задачи образуют дискретные множества.

ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ И УДОВЛЕТВОРЕНИЕ НАЧАЛЬНОМУ УСЛОВИЮ

Согласно принципу суперпозиции общее решение для функции R есть

$$R(r, t) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j X_j(r) \cdot e^{-\alpha_j t}, \quad (18)$$

где X_j — собственные функции задачи Штурма—Лиувилля, $\alpha_j = \frac{k_j^2 + \lambda^2}{\mu_2 \sigma_1}$. Коэффициенты C_j определяются из начального условия

$$\bar{R}(r, t) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j X_j(r) \cdot e^{-\alpha_j t} \Big|_{t=0}. \quad (19)$$

Стационарное решение \bar{R} удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} r^2 \bar{R}_{rr}'' + \frac{1}{r} \bar{R}_{rr}'' - (\lambda^2 r^2 + 1) \bar{R} &= 0, \quad 0 \leq r \leq \infty, \\ [\mu \bar{R}] &= 0, \quad [\bar{R} + r \bar{R}_r'] = 0, \quad r = r_1, r_2. \\ \bar{R} &\rightarrow -K_1(\lambda r) \cdot \lambda^2 \quad \text{при } r \rightarrow 0, \\ \bar{R} &\rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (20)$$

Для определения C_j рассмотрим известный интеграл

$$\int f V_p(\zeta r) Y_p(gr) dr = \frac{gr V_p(\zeta r) Y_{p-1}(gr) - \zeta r V_{p-1}(\zeta r) Y_p(gr)}{\zeta^2 - g^2}, \quad (21)$$

где V_p и Y_p — произвольные функции Бесселя порядка p . В качестве V_p и Y_p можно рассматривать и линейные комбинации этих функций. Если $p = 1$, то можем записать иначе:

$$\int r V_1(\zeta r) Y_1(gr) dr = \frac{V_1(\zeta r) [Y_1(gr) + r Y_1'(gr)] - Y_1(gr) [V_1(\zeta r) + r V_1'(\zeta r)]}{\zeta^2 - g^2}. \quad (22)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по аргументу функции. Выберем в качестве $V_1(\zeta r) = X_j(r) \equiv X(k_j r)$, а в качестве $Y_1(gr) = X_n(r) \equiv X(k_n r)$, ($j \neq n$). Тогда

$$\int_{r_1}^{r_2} r X(k_j r) X(k_n r) dr = \frac{X(k_j r) [X(k_n r) + r X'(k_n r)] - X(k_n r) [X(k_j r) + r X'(k_j r)]}{k_j^2 - k_n^2},$$

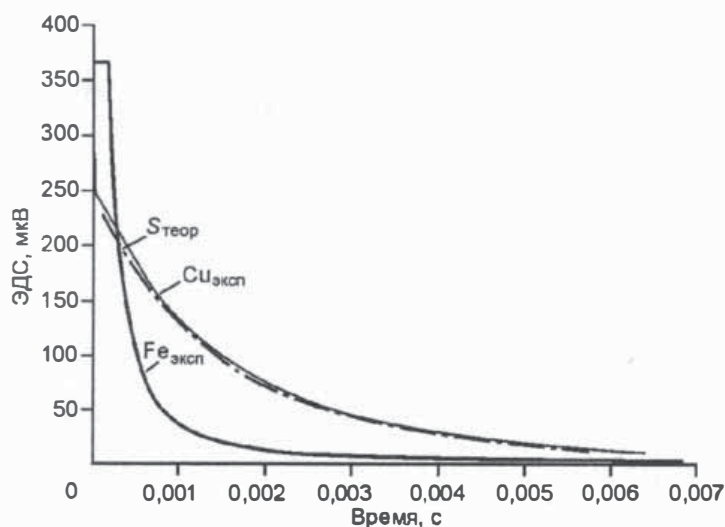


Рис. 3. Данные математического и физическо-го моделирования в немагнитной и в ферромагнитной моделях.

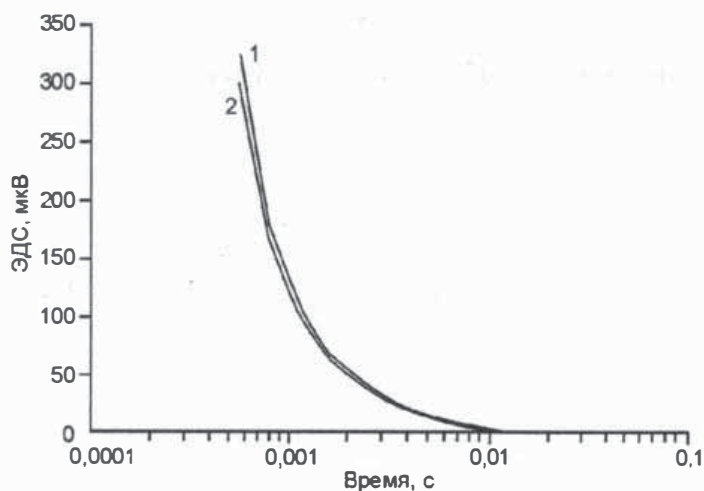


Рис. 4. Теоретическая (1) и экспериментальная (2) ЭДС в ферромагнитной стальной колонне.

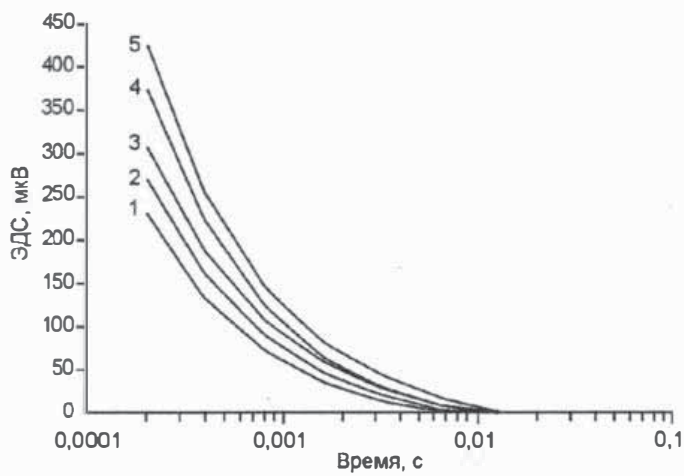


Рис. 5. Зависимость теоретической ЭДС от толщины стенок стальной колонны.

1 — 3 мм; 2 — 3,5; 3 — 4; 4 — 4,5; 5 — 5 мм.

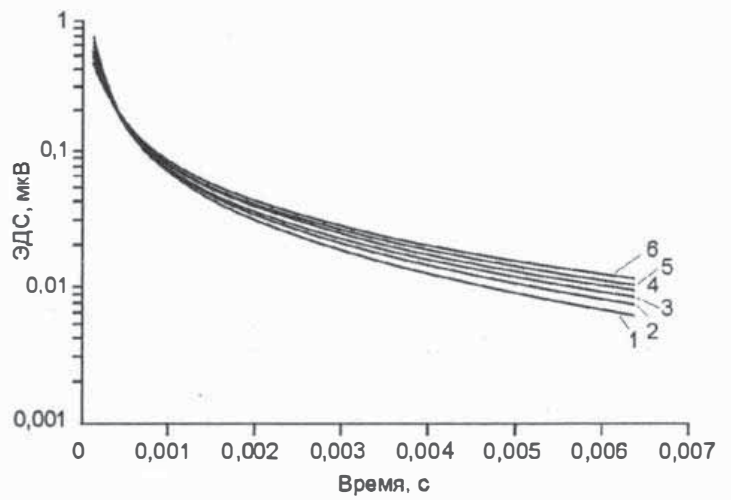


Рис. 6. Зависимость нестационарной ЭДС от относительной магнитной проницаемости вещества колонны.

1 — 25; 2 — 50; 3 — 75; 4 — 100; 5 — 125; 6 — 150.

или, учитывая условия (16), имеем

$$\int_{r_1}^{r_2} r X(k_j r) X(k_n r) dr = \frac{X(k_j r_2) X(k_n r_2) a_2 - X(k_n r_2) X(k_j r_2) a_2}{k_j^2 - k_n^2} - \frac{X(k_j r_1) X(k_n r_1) a_1 - X(k_n r_1) X(k_j r_1) a_1}{k_j^2 - k_n^2} \equiv 0.$$

Таким образом, собственные функции $X(k_j r)$ ортогональны с весом r . Умножая выражение (19) на $r \cdot X(k_n r)$ и интегрируя, получим

$$C_j = \frac{\int_{r_1}^{r_2} r \cdot \bar{R}(\lambda r) \cdot X(k_j r) \cdot dr}{\int_{r_1}^{r_2} r \cdot X^2(k_j r) \cdot sr} \quad (23)$$

Интеграл в знаменателе выражения (23) берется аналитически

$$\int_{r_1}^{r_2} r \cdot X^2 dr = \frac{r_2^2}{2k_j^2 r_2^2} X^2(k_j r_2) (k_j^2 r_2^2 + a_2^2 + 2a_2) - \frac{r_1^2}{2k_j^2 r_1^2} \cdot X^2(k_j r_1) (k_j^2 r_1^2 + a_1^2 - 2a_1). \quad (24)$$

Выражение для интеграла в числителе (23) получим, используя равенство 5.54 из [7] и соотношения между функциями Бесселя, Неймана, и модифицированными функциями Бесселя [8]:

$$I_0(x) = J_0(ix), \quad I_1(x) = -J_1(ix), \quad K_0(x) = \frac{\pi}{2} [iJ_0(x) - N_0(x)], \\ K_1(x) = -\frac{\pi}{2} [J_1(x) + iN_1(x)].$$

В результате получим

$$\int_{r_1}^{r_2} r \bar{R}(\lambda r) X(k_j r) dr = AA^* \frac{\lambda r J_1(k_j r) I_0(\lambda r) - k_j r J_0(k_j r) I_1(\lambda r)}{k_j^2 + \lambda^2} \Big|_{r_1}^{r_2} + \\ + BA^* \frac{\lambda r N_1(k_j r) I_0(\lambda r) - k_j r N_0(k_j r) I_1(\lambda r)}{k_j^2 + \lambda^2} \Big|_{r_1}^{r_2} -$$

$$\begin{aligned}
& - AB^* \frac{\lambda r J_1(k_j r) K_0(\lambda r) + k_j r J_0(k_j r) K_1(\lambda r)}{k_j^2 + \lambda^2} \cdot |r_1^2 - \\
& - BB^* \frac{\lambda r N_1(k_j r) K_0(\lambda r) + K_1 r N_0(k_j r) K_1(\lambda r)}{k_j^2 + \lambda^2} \cdot |r_1^2,
\end{aligned} \quad (25)$$

где $X = AJ_1(k_j r) + BN_1(k_j r)$, $\bar{R} = A^* I_1(\lambda r) + B^* K_1(\lambda r)$.

Коэффициенты A и B с точностью до сомножителя определим из первого уравнения (16)

$$A = N_0(k_j r) - \bar{a}_1 N_1(k_j r_1), \quad B = -J_0(k_j r) + \bar{a}_1 J_1(k_j r).$$

Имея начальное условие, запишем общее решение задачи (20):

$$\begin{aligned}
\bar{R}_1 &= -K_1(\lambda r) \lambda^2 + CI_1(\lambda r), \quad r \leq r_1, \\
\bar{R}_2 &= A^* I_1(\lambda r) + B^* K_1(\lambda r), \quad r_1 \leq r \leq r_2, \\
\bar{R}_3 &= DK_1(\lambda r), \quad r \geq r_2.
\end{aligned} \quad (26)$$

Из условий (20) на поверхностях раздела найдем коэффициенты A^* и B^*

$$\begin{aligned}
A^* &= -B^* f_1 - \lambda^2 f_2, \\
B^* &= \frac{\lambda^2 f_2 [I_0(\lambda r_2) K_1(\lambda r_2)] + \bar{\mu} I_1(\lambda r_2) K_0(\lambda r_2)}{[K_0(\lambda r_2) K_1(\lambda r_2) (\bar{\mu} - 1)] - f_1 [I_0(\lambda r_2) K_1(\lambda r_2) + \bar{\mu} I_1(\lambda r_2) K_0(\lambda r_2)]}, \\
f_1 &= \frac{I_1(\lambda r_1) K_0(\lambda r_1) + \bar{\mu} I_0(\lambda r_1) K_1(\lambda r_1)}{(\bar{\mu} - 1) I_0(\lambda r_1) I_1(\lambda r_1)}, \\
f_2 &= \frac{1}{(\bar{\mu} - 1) \lambda r_1 I_0(\lambda r_1) I_1(\lambda r_1)}.
\end{aligned} \quad (27)$$

Итак, внутри стенок металлического цилиндра решение найдено и определены все функции, входящие в (18). В соответствии с условием (10) на поверхностях раздела при $r = r_1$ имеем $\mu_0 R_0 = \mu_1 R_1$, что позволяет найти решение задачи для внутренней полости цилиндра ($r \subseteq r_1$):

$$R_0 = \bar{\mu} \sum_{j=0}^{\infty} C_j \frac{X(k_j r_1)}{I_1(\lambda r_1)} \cdot I_1(\lambda r) e^{-\alpha_j r}.$$

Из (2) и (6) находим выражение для ЭДС, индуцируемой в контуре радиусом r , помещенном во внутреннюю область проводящего магнитного цилиндра

$$\varepsilon = \frac{r}{\sigma \cdot r_1^3} \int_0^{\infty} G \cdot \frac{I_1(\lambda r) \cdot \cos(\lambda z)}{I_1(\lambda r_1)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (m_j^2 + g_j^2) \cdot \bar{C}_j \cdot X(k_j r_1) \cdot e^{-\frac{(m_j^2 + g_j^2) r}{r_1^2 \mu \sigma}} dg_j, \quad (28)$$

где $m_j^2 = k_j^2 r_1^2$, $g_j^2 = \lambda^2 r_1^2$, $G = \frac{M \cdot g_1}{\pi \cdot r_1}$, если источник поля — вертикальный магнитный диполь с моментом M и $G = 2 \cdot j \cdot r_k \cdot I_1(\lambda r_k)$, если источник — токовый контур радиусом r_k .

Таким образом, получено интегральное выражение (28), описывающее нестационарное электромагнитное поле дипольного источника и контура с током в присутствии проводящего магнитного цилиндра. Выражение удобно для численного анализа, но, как следует из (28), при малых временах и больших значениях магнитной проницаемости и удельной проводимости среды сходимость ряда ухудшается. Полученное выражение позволяет найти решение для нестационарного электромагнитного поля токового контура в бесконечно тонкой цилиндрической пленке с интегральной проводимостью S , когда $r_2 \rightarrow r_1$, $\rho_1 \rightarrow 0$, так что $S = \frac{r_2 - r_1}{\rho_1} \rightarrow \text{const}$ при $\bar{\mu} = \mu_1 / \mu_0 = 1$.

Из уравнения (17), определяющего собственные числа, при $r_2 \rightarrow r_1$ получаем

$$\alpha = \frac{1}{\mu_1 S r_1 I_1(\lambda r_1) K(\lambda r_1)},$$

т. е. в случае пленки имеется только одно собственное число. Коэффициент

$$C = \frac{\int_{r_1}^{r_2} r \cdot \bar{R}(\lambda r) \cdot X(k_j r) \cdot dr}{\int_{r_1}^{r_2} r \cdot X^2(k_j r) \cdot dr} = \frac{\bar{R}(\lambda r_1)}{X(\lambda r_1)} = -\frac{\lambda^2 K_1(\lambda r_1)}{X(k r_1)},$$

И тогда из (28) для ЭДС в приемном контуре радиуса r внутри цилиндрической пленки S получим известное [9] выражение

$$\varepsilon(t) = \frac{2Jr_k r}{r_1^2} \int_0^{\infty} I_1(\lambda r_k) \cdot I_1(\lambda r) \frac{\cos(\lambda z)}{(I_1(\lambda r_1))^2} \exp\left(-\frac{t}{\mu S r_1 \cdot I_1(\lambda r_1) \cdot K_1(\lambda r_1)}\right) d g_1. \quad (29)$$

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ФИЗИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Тестирование решения и результатов численного моделирования проводилось несколькими способами. Внутреннее тестирование выполнялось сравнением расчетов по общей формуле с частным случаем (29) для немагнитной проводящей цилиндрической пленки. Внешнее тестирование основано на сравнении результатов расчетов и данных физического моделирования. На рис. 3 приведены результаты расчета переходного процесса в немагнитной проводящей пленке с интегральной проводимостью S ($S_{\text{теор}}$) и данных физического моделирования в медном цилиндре с электропроводностью σ и толщиной h такими, что $\sigma \cdot h = S$ ($\text{Cu}_{\text{эксп}}$). Здесь же по результатам физического моделирования показан спад ЭДС в отрезке металлической ферромагнитной колонны ($\text{Fe}_{\text{эксп}}$). Различие между кривыми спада ЭДС в расчетах и эксперименте для немагнитной модели уменьшается с увеличением времени становления, что и следовало ожидать. На ранних временах переходные процессы различаются, поскольку толщина скин-слоя меньше, чем толщина стенки медного цилиндра. Как видно из рисунка, нестационарная ЭДС в ферромагнитном образце затухает значительно быстрее.

Было проведено физическое моделирование в стальной трубе, а также выполнены расчеты нестационарного поля в проводящем магнитном цилиндре с геометрическими размерами физической модели, удельной проводимостью $\sigma = 1/1,3 \cdot 10^{-7}$ при различных значениях магнитной проницаемости. Сравнение расчета и эксперимента (рис. 4) позволяет оценить магнитную проницаемость материала колонны в $150 \mu_0$. Как следует из рис. 4, с уменьшением времени различия между расчетами и данными эксперимента в проводящих магнитных цилиндрах становятся существенными. Одной из причин этого может являться изменение магнитной проницаемости металла, из-за перемагничивания вещества вихревыми токами. Таким образом, данные численных расчетов и эксперимента согласовываются, а расхождение до 10 % на ранних временах могут быть объяснены.

На рис. 5 приведены теоретические кривые зондирования для различных значений толщины цилиндра h . Изменение толщины стенки колонны на 0,5 мм приводит на временах от 100 мкс до 1 мс к 15—30 %-ому изменению полезного сигнала при уменьшении его абсолютной величины от 400 до 50 мкВ. Следовательно, при минимальном уровне полезного сигнала в 0,5 мкВ, оценка изменения толщины колонны может быть произведена с точностью до 0,1 мм.

На рис. 6 приведены графики спада ЭДС при изменении магнитной проницаемости материала колонны по данным теоретических расчетов. Из сравнения графиков рис. 5 и 6 следует, что области наибольшего влияния геометрических и магнитных параметров разнесены во времени. Эти зависимости нестационарного электромагнитного поля от параметров ферромагнитной колонны используются для обнаружения и оценки дефектов обсадных колонн при минимальном влиянии магнитных неоднородностей колонны. А на более поздних временах они открывают путь для изучения вариации магнитной проницаемости и оценки изменения механических напряжений в прискважинной геологической среде.

Проведенный численный анализ показал [9], что нестационарное электромагнитное поле будет оказывать слабое влияние на намагниченность металлических колонн, вследствие малой глубины его проникновения. Например, напряженность нестационарного магнитного поля на глубине 2,4 мм имеет величину около 0,1 А/м, что составляет доли процента от постоянного магнитного поля Земли в средних широтах. Причем с увеличением намагниченности будут уменьшаться как амплитуда нестационарного поля, так и глубина его проникновения.

ВЫВОДЫ

1. Решение краевой задачи для нестационарного электромагнитного поля сведено к проблеме собственных значений задачи Штурма—Лиувилля. Проблема собственных значений сформулирована для пространственных гармоник. Решение задачи для магнитного проводящего цилиндра и цилиндрической немагнитной проводящей пленки получено в замкнутой интегральной форме.

2. Искусственное нестационарное поле внутри металлических колонн слабо влияет на процесс намагничивания и обладает высокой чувствительностью к электрическим и магнитным параметрам металлических колонн.

3. Приведенные данные численного анализа и эксперимента показали достоверность решения задачи, позволили выявить возможности метода по измерению толщины обсадных колонн и оценке ее магнитной проницаемости.

4. Имеются физические предпосылки, подтвержденные математическим моделированием, для осуществления бесконтактного метода контроля за техническим состоянием металлических колонн скважин и изменением поля механических напряжений в прискважинном массиве горных пород.

Дальнейшее принципиальное усовершенствование метода мы связываем с развитием теоретической базы, решением трехмерных задач электродинамики, трехмерным физическим моделированием, изучением особенностей поведения нестационарного электромагнитного поля в ферромагнетиках; в частности, влияния на измеряемое поле дисперсии магнитной проницаемости в области высоких частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров В. А. Скважинные дефектоскопы-толщиномеры для исследования многоколонных скважин // НТВ Каротажник. Тверь, ГЕРС, 1996, вып. 24, с. 83—94.
2. Потапов А. П., Кнеллер Л. Е. Численное решение задачи становления магнитного диполя в скважинах многоколонной конструкции // НТВ Каротажник. Тверь, ГЕРС, 1999, вып. 52, с. 76—83.
3. Вонсовский С. В., Шур Я. С. Ферромагнетизм. М., Л., Гостехтеоретиздат, 1948, 816 с.
4. Бозорт Р. Ферромагнетизм. М., ИЛ, 1956, 784 с.
5. Поливанов К. М. Ферромагнетики. М.; Л., Госэнергоиздат, 1957, 256 с.
6. Тихонов А. Н., Скугаревская О. А. О становлении электрического тока в неоднородной среде II // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1950, т. XIV, № 4, с. 281—293.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм и произведений. М., Гос. изд-во ф.-м. лит., 1963, 1097 с.
8. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М., Наука, 1979, 830 с.
9. Эпов М. И., Морозова Г. М. Электромагнитный метод определения вариаций механических напряжений в горных породах // Геология и геофизика, 1999, т. 40, № 5, с. 785—791.

*Рекомендована к печати 17 мая 2000 г.
С. В. Гольдиным*

*Поступила в редакцию
6 апреля 2000 г.*