

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОДОНЕФТЯНОГО КОНТАКТА В НАЗЕМНО-СКВАЖИННОЙ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКЕ

В. С. МОГИЛАТОВ

*Сибирский научно-исследовательский институт геологии, геофизики и минерального сырья,  
630104, Новосибирск, Красный пр. 67, Россия*

Для электроразведки на постоянном токе водонефтяной контакт моделируется тонким протяженным включением, обладающим переменными поперечным сопротивлением и продольной проводимостью. Вводятся граничные условия на таком объекте. Задача для потенциалов решается разделением переменных при выполнении некоторых интегральных условий. Дан пример расчета.

*Электроразведка, математическое моделирование, водонефтяной контакт, постоянный ток.*

Многие методические вопросы наземно-скважинной электротометрии могут быть решены при рассмотрении идеализированных геоэлектрических моделей среды. При этом достигаются две цели. Во-первых, исключаются из рассмотрения второстепенные детали. Во-вторых, упрощаются привлекаемые математические средства.

Идеализация модели среды в развиваемом здесь подходе, имеющем в виду прежде всего нефтепоисковые приложения, заключается в замене протяженных объектов конечной мощности и конечного удельного сопротивления бесконечно тонкими объектами конечной продольной проводимости ( $S$ -объект), конечного поперечного сопротивления ( $T$ -объект) или тонкими объектами, обладающими и продольной проводимостью и поперечным сопротивлением ( $TS$ -объект). Такой подход (и терминологию) можно считать общепринятым [1—3]. Другое упрощение состоит в том, что модель среды определяется осевой симметрией, а именно: в горизонтально-однородную вмещающую среду включены осесимметричные  $T$  и  $S$ -объекты. Кратко обоснуем эти допущения.

Рассмотрим общие условия замены слоев относительно малой мощности и отличающихся по сопротивлению от вмещающей среды плоскостями  $S$  и  $T$ . Для пласта мощности  $h$  и сопротивлением  $\rho$ , помещенного в однородное пространство с удельным сопротивлением  $\rho_0$  аномальная часть потенциала в точке  $M(r, z)$  над пластом ( $z > 0$ ) поля точечного источника ( $z_0 > 0$ ) составляет

$$\varphi_a = -\frac{I\rho_0}{4\pi} \int_0^{\infty} J_0(mr) \cdot \exp[-m(z_0 + z)] \cdot \frac{1 - \exp(-2mh)}{1+k - \frac{1-k}{1+k} \exp(-2mh)} \cdot dm, \quad (1)$$

где  $z_0$  — удаление источника от пласта,  $z$  — удаление точки наблюдения,  $r$  — радиус,  $I$  — ток источника,  $k = \rho/\rho_0$ .

Определим условия, при которых это решение переходит в решение для аномального поля плоскости  $T$  или  $S$ .

Нетрудно показать, что если  $z_0 \gg h$  или  $z \gg h$ , или  $r \gg h$ , то интеграл в основном определяется на интервале значений  $0 \leq m \leq m_0$  таким, что  $2mh \ll 1$ , и можно записать:

$$\varphi_a = -\frac{I\rho_0}{4\pi} \int_0^{\infty} J_0(mr) \cdot \exp[-m(z_0 + z)] \cdot \frac{m \cdot h}{\frac{2k}{1-k^2} + \frac{1-k}{1+k} \cdot m \cdot h} \cdot dm. \quad (2)$$

Теперь потребуем, чтобы сопротивление пласта сильно отличалось от сопротивления среды, т.е.  $k \gg 1$  или  $k \ll 1$ .

В первом случае получим известное выражение для аномальной части потенциала в присутствии  $S$ -плоскости ( $\mathcal{L} = h/\rho$ ):

© В. С. Могилатов, 1994

$$\varphi_a^S = -\frac{I\rho_0}{4\pi} \cdot \int_0^{\infty} J_0(mr) \cdot \exp[-m(z_0 + z)] \cdot \frac{m \cdot S \cdot \rho_0}{2 + m \cdot S \cdot \rho_0} \cdot dm \quad (3)$$

Во втором случае получим аномальный потенциал плоскости  $T$  ( $T = h \cdot \rho$ ):

$$\varphi_a^T = +\frac{I\rho_0}{4\pi} \cdot \int_0^{\infty} J_0(mr) \cdot \exp[-m(z_0 + z)] \cdot \frac{m \cdot T/\rho_0}{2 + m \cdot T/\rho_0} \cdot dm \quad (4)$$

Таким образом, условие замены реального пласта плоскостью  $T$  или  $S$  при моделировании (математическом или физическом) состоит в том, чтобы хотя бы один из параметров приемно-питающей установки ( $z_0$ ,  $z$ ,  $r$ ), был бы много больше мощности пласта. Кроме того, пласт должен быть достаточно выделен по сопротивлению.

Что касается ограничения формы объектов в плане (осевая симметрия), то в методическом отношении это не является существенным, а, может быть, и полезно на начальном этапе. Заметим также, что и для моделирования реальной ситуации можно пользоваться этими моделями при надлежащем выборе положений источников и профилей наблюдения. На рис. 1 изображен некоторый объект, источники помещены в скважины  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , а измерения проведены по профилям  $MN$  и  $MA_1$ . Тогда при интерпретации результатов наблюдения поля от источника  $A_3$  на участке профиля  $A_3N$  можно пользоваться моделью „ $T(S)$ -диск”, на участке  $A_2A_3$  — моделью „ $T(S)$ -плоскость”. При работе от источника  $A_2$  на профиле  $MA_1$  объект рассматриваем, как плоскость, а интерпретируя поле от  $A_1$  по профилю  $MA_1$ , пользуемся моделью „ $T(S)$ -дыра”. Разумеется, это необходимо еще обусловить соответствующими геометрическими и геоэлектрическими соотношениями.

### Постановка задачи

Для построения математической модели использовалась осесимметричная геоэлектрическая модель (рис. 2). Вмещающая среда — однородный пласт с удельным сопротивлением  $\rho$  и магнитной проницаемостью вакуума. Положение дневной поверхности и непроводящего основания определяются величинами  $z = h_1$  и  $z = -h_2$ , соответственно. Объект — залежь, окруженная, а, может быть, и подстилаемая соленой водой, — моделируется тонким горизонтальным слоем, обладающим поперечным сопротивлением, произвольно зависящим от расстояния до оси  $r$ ,  $T(r)$  и продольной проводимостью  $S(r)$ , т.е.  $TS$  (или  $ST$ )-объектом. Рассматривая плоскость, в которой расположен объект, будем также говорить о  $TS$ -плоскости,  $TS$ -границе.

Итак, начало координат поместим в точку пересечения  $TS$ -плоскости с направленной вверх осью  $z$ . В качестве источника будем рассматривать один заземленный на оси  $z$  ( $z = z_0$ ) электрод (второй электрод отнесен на бесконечность). Таким образом, мы здесь рассмотрим центральное (в плане) положение источника. Смещение источника можно учесть методом, использованным в [4]. От решения, полученного для одного электрода легко перейти к решению для вертикального электрического диполя (ВЭД) или линии (ВЭЛ).

Определим граничные условия на  $TS$ -плоскости. Этот вопрос в общем виде обсуждался в [1]. Получим здесь эти условия в нашем конкретном случае плоского горизон-

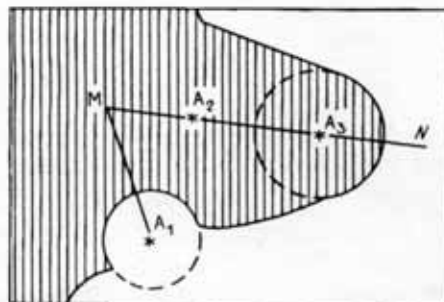


Рис. 1

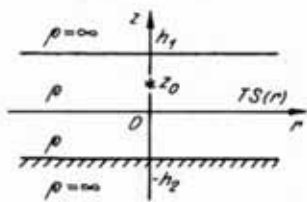


Рис. 2

тального  $TS$ -объекта, в котором  $T$ -объект расположен „вверху“.

Рассмотрим среду с двумя границами раздела, одной из которых является  $T$ -плоскость (рис. 3). На границе I выполняются условия (в прямоугольных координатах):

$$E_{x1} - E_{x2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T(x,y)}{\rho_1} E_{z1} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T(x,y)}{\rho_2} E_{z2} \right),$$

$$E_{y1} - E_{y2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{T(x,y)}{\rho_1} E_{z1} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{T(x,y)}{\rho_2} E_{z2} \right),$$

$$\frac{E_{z1}}{\rho_1} = \frac{E_{z2}}{\rho_2}, \quad (5)$$

$H_x, H_y, H_z$  — непрерывны.

Сделаем  $h$  — мощность второго слоя достаточно малой и воспользуемся для второй среды уравнением Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{E}/\rho_2 \quad (6)$$

или

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{E_y}{\rho_2}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{E_z}{\rho_2}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} = -\frac{E_x}{\rho_2}.$$

Полагая, при  $h \rightarrow 0$  и  $\rho_2 \rightarrow 0$ , что

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\Delta H_x}{h}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\Delta H_y}{h}.$$

и  $h/\rho_2 = S$ , получим, что прирост магнитного поля во второй среде составит

$$\Delta H_{x2} = S \cdot E_{y2}, \quad \Delta H_{y2} = S \cdot E_{x2}. \quad (7)$$

Учитывая условия на  $T$ -границе I, скачок магнитного поля во второй среде и условия на простой границе II (непрерывность тангенциальных компонент), приходим к таким условиям на  $TS$ -границе (индекс 3 меняем на 2 и  $\rho_1 = \rho_3 = \rho$ ):

$$E_{x1} - E_{x2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T}{\rho} E_{z1} \right),$$

$$E_{y1} - E_{y2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{T}{\rho} E_{z1} \right), \quad (8)$$

$$H_{x1} - H_{x2} = S \cdot E_{y2} = S \cdot \left[ E_{y1} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{T}{\rho} E_{z1} \right) \right],$$

$$H_{y1} - H_{y2} = -S \cdot E_{x2} = -S \cdot \left[ E_{x1} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T}{\rho} E_{z1} \right) \right].$$

Обращаем внимание на то, что хотя  $TS$ -граница не имеет „толщины“, она все же имеет вертикальную структуру и здесь условия на случай, когда  $T$ -объект перекрывает  $S$ -объект.

Следуя работе [1] введем потенциалы

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = \text{grad } \varphi, \quad \varphi = \rho \text{ div } \mathbf{A}. \quad (9)$$

В цилиндрической системе координат, учитывая осевую симметрию задачи, определяем

$$H_r = -\frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad E_r = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad E_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (10)$$

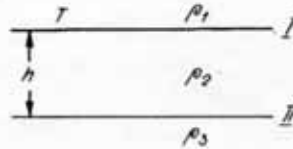


Рис. 3

Скалярный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа, условию  $\varphi \rightarrow \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}$  при  $z \rightarrow z_0, r \rightarrow 0$ , и условию  $\partial\varphi/\partial z = 0$  при  $z = h_1, -h_2$ .

На  $TS$ -границе потребуем выполнения достаточных условий:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{T}{\rho} \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial A_{z1}}{\partial r} - \frac{\partial A_{z2}}{\partial r} = S \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} . \quad (11)$$

Решение для потенциалов будем искать в виде

$$A_z = \frac{I}{4\pi} \int_0^\infty J_0(mr) Z(m, z) dm , \quad (12)$$

$$\varphi = \frac{I\rho}{4\pi} \int_0^\infty J_0(mr) F(m, z) dm ,$$

где  $I$  — ток источника,  $J_0$  — функция Бесселя, а функции  $Z$  и  $F$  удовлетворяют уравнениям:

$$Z_z'' - m^2 \cdot Z = 0 ,$$

$$F_z'' - m^2 \cdot F = 0 , \quad (13)$$

$$F = Z_z' .$$

Поскольку нас интересуют компоненты  $E_r$  и  $E_z$  ( $H_\varphi$  на дневной поверхности не связано со свойствами среды в осесимметричной задаче), то задача сводится к отысканию функции  $F$ .

### Решение

Рассмотрим вначале решение в случае отсутствия в плоскости  $z = 0$  продольной проводимости или поперечного сопротивления. Полученное решение будем называть нормальным. Для функции  $F_n$  имеем краевую задачу:

$$F_n'' - m^2 \cdot F_n = 0, \quad -h_2 \leq z \leq h_1 ,$$

$$\frac{\partial F_n(h_1)}{\partial z} = \frac{\partial F_n(-h_2)}{\partial z} = 0 ,$$

$$[F_n] |_{z=z_0} = 0, \quad \left[ \frac{\partial F_n}{\partial z} \right] \Big|_{z=z_0} = -2 \cdot m , \quad (14)$$

Решение получаем в виде:

$$F_n = 2 \cdot \frac{ch[m(h_1 - z)] \cdot ch[m(h_2 + z_0)]}{sh[m(h_1 + h_2)]}, \quad \text{при } z \geq z_0 ,$$

$$F_n = 2 \cdot \frac{ch[m(h_2 + z)] \cdot ch[m(h_1 - z_0)]}{sh[m(h_1 + h_2)]}, \quad \text{при } z \leq z_0 . \quad (15)$$

Рассмотрим теперь включение в двуслойный разрез объекта с переменной продольной проводимостью ( $S \equiv S(r)$ ) и переменным поперечным сопротивлением ( $T \equiv T(r)$ ). По-прежнему ищем потенциалы в виде (12), т.е. решаем задачу методом разделения переменных. Переменные разделяются при выполнении некоторых интегральных условий на  $TS$ -границе, и мы приходим к следующей краевой задаче для аномальной части функции  $F$ :

$$F_a - m^2 \cdot F_a = 0, \quad -h_2 \leq z \leq h_1 ,$$

$$\frac{\partial F_a(h_1)}{\partial z} = \frac{\partial F_a(-h_2)}{\partial z} = 0 ,$$

$$[F_a] |_{z=0} = m/\rho \cdot \int_0^\infty \left( \frac{F_{a1}(0)}{\partial z} + \frac{F_{a1}(0)}{\partial z} \right) \cdot \Psi_T(m, m') dm' ,$$

$$\left[ \frac{\partial F_a}{\partial z} \right] \Big|_{z=0} = \rho \cdot m^2 \cdot \int_0^{\infty} m' \cdot (F_{a2}(0) + F_{a2}(0)) \cdot \Psi_s(m, m') \cdot dm' . \quad (16)$$

Здесь

$$\Psi_s = \int_0^{\infty} J_1(mr) \cdot J_1(m'r) \cdot r \cdot S(r) dr ,$$

$$\Psi_T = \int_0^{\infty} J_0(mr) \cdot J_0(m'r) \cdot r \cdot T(r) dr . \quad (17)$$

Опуская промежуточные выкладки, приведем решение в виде, пригодном для численной реализации на ЭВМ:

$$F_a(z) = -Y(m) \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{ch[m(h_1 - z)]}{sh(mh_1)} , \quad z \geq 0 , \quad (18)$$

где функция  $Y$  является решением системы интегральных уравнений:

$$Y = \frac{m^2 \cdot s_1 \cdot c_2}{e} \cdot f_2 - \frac{m^2 \cdot s_1 \cdot s_2}{e} \cdot f_1 ,$$

$$X = -\frac{m \cdot c_1 \cdot c_2}{e} \cdot f_2 - \frac{m \cdot s_1 \cdot c_2}{e} \cdot f_1 ; \quad (19)$$

$$e = sh[m(h_1 + h_2)] , \quad s_i = sh(mh_i) , \quad c_i = ch(mh_i) , \quad i = 1, 2 ;$$

$$f_2 = \int_0^{\infty} (X + F_n(0)) \cdot \Psi_s(m, m') \cdot m' dm' ,$$

$$f_1 = \int_0^{\infty} \left( Y + \frac{F_n(0)}{\partial z} \right) \cdot \Psi_T(m, m') dm .$$

Итак, задавшись конкретным распределением продольной проводимости и поперечного сопротивления, определяем функции  $\Psi_T$  и  $\Psi_s$ , затем решаем систему интегральных уравнений (19). Выражения для функции  $F$  нормального поля даны в (15). Определив функцию  $Y$ , по (18) находим аномальную часть  $F$  на дневной поверхности. Пользуясь определениями (10), (12), находим, наконец, компоненты нормального и аномального полей.

#### Расчет на ЭВМ. Пример расчета

По описанному выше алгоритму выполнен большой объем расчетов методического характера [3]. Интегральные уравнения решаются путем сведения к системам линейных алгебраических. Основные трудности при расчетах связаны с осциллирующим поведением функций  $\Psi$ .

В качестве примера приведем результаты расчета поля точечного источника, заземленного в подошву однородного слоя ( $H, \rho$ ), содержащего  $T$ -диск ( $T = H \cdot \rho, R = 4 \cdot H$ ), окруженный  $S$ -кольцом ( $S = H/\rho, R_1 = 4 \cdot H, R_2 = 5 \cdot H$ ). На рис. 4 представлена нормированная дифференциальная ( $d(E_r/E_r^{nor})/dr$ ) кривая, где нормирующий градиент  $E_r^{nor}$  рассчитан для некоторой горизонтально-

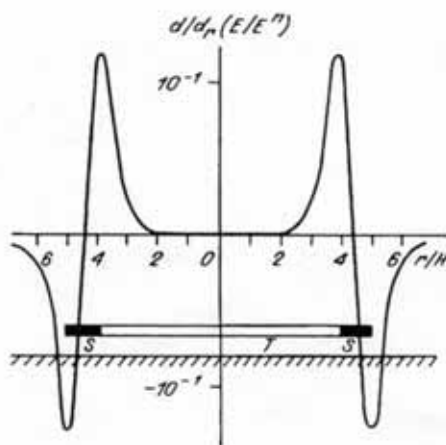


Рис. 4

слоистой среды (в данном случае вместо  $TS$ -объекта включена в слой  $T$ -плоскость с тем же значением  $T=H \cdot \rho$ ). Такая трансформация градиента весьма эффективно визуализирует информацию о границах простирающихся протяженных включений. Положение водонефтяного контакта, моделируемого здесь замещением поперечного сопротивления продольной проводимостью, а также и внешний край водного окаймления, отмечаются экстремумами на кривой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дашевский Ю. А. Переменное электрическое поле в присутствии тонких неоднородных тел // Геология и геофизика, 1991, № 8, с. 122—128.
2. Зингер Б. Ш., Файнберг Э. Б. Электромагнитная индукция в неоднородных тонких слоях. М., ИЗМИРАН, 1985, 234 с.
3. Рабинович Б. И., Гендельман А. М., Могилатов В. С. Выбор методики наземно-скважинной электроразведки на постоянном токе при оконтуривании нефтегазовой залежи // Геология и геофизика, 1985, № 9, с. 100—105.
4. Могилатов В. С., Гендельман А. М. Об экранирующем действии нефтяной залежи при электроразведке // Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, 1985, № 6, с. 101—106.
5. Могилатов В. С. Математическое моделирование задач наземно-скважинной электроразведки // Геология и геофизика, 1983, № 3, с. 111—116.

*Поступила в редакцию 26 ноября 1992 г.,  
после доработки — 31 марта 1993 г.*

V. S. Mogilatov

#### THE OIL-WATER CONTACT IN GROUND-BOREHOLE ELECTRICAL PROSPECTING: A MATHEMATICAL MODEL

To carry out direct-current prospecting, the oil-water contact was modeled by a thin elongated inclusion having a variable transverse resistance and longitudinal conductance. Boundary conditions are introduced for that object. The problem for potentials is solved by separating variables with some integral conditions being performed. An example is given.

*Electrical prospecting, mathematical modelling, oil-water contact, direct current.*