

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ ЗС

В. С. МОГИЛАТОВ

СНИИГГМС, 630104, Новосибирск, Красный пр., 67, Россия

Развивается метод расчета устанавливающегося электромагнитного поля в горизонтально-слоистой среде, предложенный А. Н. Тихоновым. Метод предлагается как средство создания быстрых программ расчета основной прямой задачи ЗС и демонстрируется для разных источников поля.

В настоящее время, вероятно, каждый практикующий метод ЗС электроразведчик или исследователь в этой области имеет в своем распоряжении ту или иную вычислительную процедуру для расчета устанавливающегося поля в горизонтально-слоистой среде как основу интерпретационного процесса и методических изысканий. Однако проблема далеко не исчерпана. Постоянно ощущается потребность во все более быстрых и экономичных программах для использования в системах диалогового подбора, автоматического решения обратной задачи, причем ясно видна назревшая необходимость применять эти системы в полевых условиях. Таким образом, поиск новых и развитие известных алгоритмов расчета устанавливающегося поля всегда актуальны.

Как известно, два основных подхода к решению задачи об установлении поля в слоистой среде были предложены почти одновременно А. Н. Тихоновым [5, 6] и М. С. Шейнманом [7]. Собственно, речь идет о различных способах разделения переменных в краевой задаче для вектора-потенциала. Решение по Шейнману приводит к двукратному интегралу Фурье—Бесселя. Алгоритм Шейнмана получил наибольшее распространение и развитие (например, [1]), несмотря на трудности в численной реализации (может быть, потому, что в качестве промежуточного этапа включает в себя расчет привычного частотного режима).

Метод А. Н. Тихонова, который можно назвать методом устанавливающих пространственных гармоник, развивался в работах О. А. Скугаревской, П. П. Фролова и других авторов (например, [3]), однако это не привело к появлению эффективной вычислительной процедуры для многослойных сред. До эпохи персональных компьютеров наиболее значительной была программа ALEX (В. П. Соколов, Л. А. Табаровский), созданная на основе частотного подхода и требовавшая больших ресурсов.

Распространение персональных ЭВМ потребовало существенно более быстрых процедур решения прямой задачи и они появились — примером может служить процедура в составе диалоговой электроразведочной системы ЭРА (М. И. Эпов, И. Н. Ельцов), которая использует решение во временной области, но с иным подходом, нежели в методе Тихонова.

Мы получили эффективные процедуры решения прямых задач для различных источников с учетом реальной формы возбуждающего импульса на основе метода Тихонова. Одна из этих процедур используется в диалоговой электроразведочной системе ПОДБОР. Разумеется, нужно помнить, что алгоритм Тихонова применим только для геоэлектрических разрезов, подстилаемых изолирующим или иде-

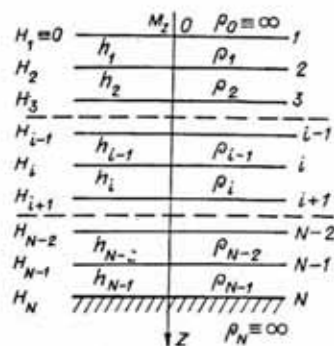


Рис. 1.

ально проводящим основанием. Здесь нашей целью является наиболее последовательное и открытое изложение методики получения конкретных решений на основе личного опыта автора.

Опишем кратко суть метода и способ его развития для многослойных сред и различных источников.

Поле вертикального магнитного диполя (ВМД)

Итак, на поверхности N -слойной среды (рис. 1) при $z = 0$ помещен источник — магнитный диполь с моментом M_z (вертикальный), который при $t = 0$ изменяется до нуля (режим выключения).

Нам необходимо решить в области $0 \leq z \leq H_N$ систему уравнений Максвелла в квазистационарном приближении

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{\rho(z)} \mathbf{E}, \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{H}}, \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\rho(z)$ — кусочно-постоянная функция, μ — магнитная проницаемость, принятая всюду постоянной и равной значению в вакууме.

Следует также учесть начальное условие и обычные условия на границах. Вводим вектор-потенциал следующим образом:

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \Delta \mathbf{A} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}. \quad (2)$$

В силу симметрии задачи достаточно иметь отличной от нуля только компоненту A_z , тогда в цилиндрической системе координат имеются

$$E_r = -\frac{\partial^2 A_z}{\partial r \partial t}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial A_z}{\partial r} \right), \quad B_r = -\frac{\partial^2 A_z}{\partial r \partial z}. \quad (3)$$

Для A_z должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \Delta A_z &= 0, \quad z < 0, \quad 0 \leq r < \infty; \\ \Delta A_z &= \frac{\mu}{\rho} \dot{A}_z, \quad H_i < z < H_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \quad 0 \leq r < \infty; \\ \Delta A_z &= 0, \quad z > H_N, \quad 0 \leq r < \infty, \\ [A_z] \Big|_{z=H_i} &= 0, \quad [A_z'] \Big|_{z=H_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N; \end{aligned} \quad (4)$$

$$A_z \rightarrow 0 \text{ при } \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty;$$

$$A_z = \frac{M_z \mu}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad t = 0;$$

$$A_z \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Здесь символика [] означает величину скачка на границе.

Разделяя переменные, получим

$$A_z = \frac{M_z \mu}{4\pi} \cdot \int_0^\infty J_0(mr) \cdot Z(m, z) \cdot dm, \quad (5)$$

где $J_0(mr)$ — функция Бесселя.

Для Z получаем соответствующую задачу:

$$\begin{aligned} Z'' - m^2 \cdot Z &= \frac{\mu}{\rho} \dot{Z}, \quad H_i < z < H_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \\ Z' + m \cdot Z &= 0, \quad z = H_i = 0; \\ Z' - m \cdot Z &= 0, \quad z = H_N; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} [Z] \Big|_{z=H_i} &= 0, \quad [Z'_z] \Big|_{z=H_i} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N-1; \\ Z &\rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty; \\ Z &= e^{-mz} \text{ при } t = 0. \end{aligned}$$

Решение предлагаем в виде

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot X_n \cdot \exp\left(-\eta_n \cdot \frac{t}{\mu}\right), \quad (7)$$

причем функции $\eta_n(m)$ принимают только положительные значения. Более подробное обоснование условий (6) можно найти в работе [6], заметим только, что именно наличие непроводящего основания позволяет ограничить задачу для Z областью $0 \leq z \leq H_N$ и искать решение в виде (7). Аналогичная ситуация возникает и в случае сверхпроводящего основания (тогда при $z = -H_N, Z = 0$).

Удовлетворяя условиям для Z , получим для X_n (индекс n опускаем, индекс i — номер слоя):

$$\begin{aligned} X_i'' + k_i^2 \cdot X_i &= 0, \quad H_i < z < H_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \\ X_{i1}' - m \cdot X_{i1} &= 0, \quad z = H_i = 0; \\ X_{iN}' + m \cdot X_{iN} &= 0, \quad z = H_N; \\ [X] \Big|_{z=H_i} &= 0, \quad [X'_z] \Big|_{z=H_i} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N-1; \\ k_i^2 &= \frac{\eta_i}{\rho_i} - m^2, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (8)$$

Решая эту краевую задачу, получим, что

$$\begin{aligned} X_i z &= A_i \cdot \cos(k_i z) + B_i \cdot \sin(k_i z), \\ X_{iz}'(z) &= -A_i \cdot k_i \sin(k_i z) + B_i \cdot k_i \cos(k_i z), \\ i &= 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (9)$$

Имея непрерывность X_i и X_{in}' , обозначим

$$\begin{aligned} X(H_i) &= \bar{X}_i, \\ i &= 1, 2, \dots, N, \\ X'_i(N_i) &= \bar{X}'_i. \end{aligned}$$

В силу однородности задачи положим

$$\bar{X}_1 = 1, \quad \bar{X}'_1 = m$$

и получим рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \bar{X}_{i+1} &= \bar{X}_i \cdot c_i + \bar{X}'_i \cdot s_i, \\ \bar{X}'_{i+1} &= -\bar{X}_i \cdot k_i^2 \cdot s_i + \bar{X}'_i \cdot c_i, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} s_i &= \sin(k_i \cdot h_i) / k_i, \\ c_i &= \cos(k_i \cdot h_i), \\ h_i &= H_{i+1} - H_i - \text{мощности слоев.} \end{aligned}$$

Теперь

110

$$\begin{aligned} X_i(z) &= \bar{X}_i \cdot \cos[k_i \cdot (H_i - z)] - \bar{X}'_i \cdot \sin[k_i \cdot (H_i - z)] / k_i, \\ X_{in}'(z) &= \bar{X}_i \cdot k_i \cdot \sin[k_i \cdot (H_i - z)] + \bar{X}'_i \cdot \cos[k_i \cdot (H_i - z)], \\ i &= 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что k_i может принимать мнимые значения, тогда вещественное тригонометрическое решение переходит в вещественное гиперболическое решение.

Наконец, условие при $z = H_N$ дает уравнение для η

$$\bar{X}'_N + m \cdot \bar{X}_N = 0. \quad (12)$$

Таким образом, задача (8) для функций X_n решена, определены также функции $\eta_n(m)$.

Остается определить весовые коэффициенты $C_n(m)$ для ряда (7). Они должны удовлетворять начальному условию для функции $Z(z, t, m)$:

$$Z(z, 0, m) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(m) \cdot X_n(z, m) = \exp(-m \cdot z). \quad (13)$$

Удовлетворяя этому условию, используя свойства функций X_n как решений краевой задачи (8), получим

$$C_n = \frac{2 \cdot m \cdot \bar{X}_{n1}}{\eta_n \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \left[\frac{1}{\rho_i} \cdot \left[\bar{X}_{ni}^2 \cdot (h_i + c_{ni} \cdot s_{ni}) + \bar{X}'_{ni}^2 \cdot \frac{h_i - c_{ni} \cdot s_{ni}}{k_i^2} + 2 \cdot s_{ni}^2 \cdot \bar{X}_{ni} \cdot \bar{X}'_{ni} \right] \right]}. \quad (14)$$

Определенные здесь коэффициенты C соответствуют положению источника на дневной поверхности ($\bar{X}_{n1} \equiv X_{n1}(0)^n \equiv 1$). Напоминаем, что индекс n относится к суммированию ряда (7) для функции Z , а индекс i — номер слоя среды.

Если необходимо получить выражения для компонент поля в воздухе, то нужно рассмотреть решения для X_n при $z < 0$ ($X_n = \exp(m \cdot z)$). Для произвольного положения источника (при z_0) в краевой задаче (6) начальное условие изменится на $Z = \exp(-m \cdot |z - z_0|)$.

Итак, необходимо вычислить интеграл (5). Для каждого узла мы считываем подынтегральную функцию $Z(m)$, для чего нужно рассчитать некоторое число членов ряда (7). Вычисление каждого n -го члена состоит в том, что по некоторому начальному значению η_n по рекуррентным формулам (10) определяются $\bar{X}_n, \bar{X}'_n, k_n$, запускается итерационный процесс решения уравнения для η_n (12) и окончательно определяются $\bar{X}_n, \bar{X}'_n, k_n, \eta_n$. Начальные значения η_n определяются на каждом шаге интегрирования по значениям η_n и их производных по m в предыдущем узле. До интегрирования значения η_n тщательно вычисляются при $m = 0$. По (14) определяются C_n . Число членов ряда ограничивается тем обстоятельством, что $\eta_{n+1} > \eta_n$. Расчет на малых временах установления требует большего числа членов ряда и, следовательно, больших затрат машинного времени, а на самых поздних временах достаточно первого члена.

По приведенному алгоритму разработана программа MAG, которая в варианте соосной установки нашла уже достаточно широкое распространение и эксплуатировалась на машинах разного класса (БЭСМ-6, Электроника-60, СМ-2, бортовой компьютер ISODEM, ДВК-2, 3, IBM PC). На ее основе созданы различные модификации (азрвариант, разнесенная установка с большим источником, возбуждение импульсом произвольной формы, выдача сигнала в виде отдельных вкладов слоев на каждом времени и пр.). Программа обеспечивает в пакете обработки данных МПП-ЗСБ быстрый подбор разреза в диалоговом режиме. Время расчета кривой становления в зависимости от числа слоев (практически неограниченного) и от диапазона времен составляет

от 5 с до 1 мин на IBM PC (286). Мы считаем, что этим возможности алгоритма совсем не исчерпаны.

ВМД. Двухслойная среда

Рассмотрим частный случай приведенного выше решения, когда средой является однородный пласт с мощностью h и с удельным сопротивлением ρ , подстилаемый изолирующим полупространством. Этот случай интересен тем, что здесь решение сводится к однократному интегралу и это позволяет получить весьма быструю программу, которая использовалась автором для различных трансформаций наблюдаемой кривой становления в кривые кажущихся величин. Итак,

$$A_z = \frac{m_z \mu}{M_z} \cdot \int_0^{\infty} J_0(mr) \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left[\rho \cdot \frac{4mk_n k_n \cos(k_n z) - m \sin(k_n z)}{\eta_n^2 m + h \eta_n / \rho} \cdot e^{\eta_n \frac{z}{\rho}} \right] \right] dm, \quad (15)$$

где $0 \leq z \leq h$, $\eta_n = (m^2 + k_n^2) \cdot \rho$, а для k_n имеем уравнение

$$\operatorname{tg}(k_n \cdot h) = \frac{2 \cdot m \cdot k_n}{k_n^2 - m^2}. \quad (16)$$

Анализ уравнения для k_n показывает, что при $m \rightarrow 0$

$$k_n^2 = a_{0n} + a_{1n} \cdot m + a_{2n} \cdot m^2 + \dots, \\ \eta_n / \rho = a_{0n} + a_{1n} \cdot m + (a_{2n} + 1) \cdot m^2 + \dots,$$

причем $a_{00} = 0$, а $a_{01} < a_{02} < a_{03} < \dots$. Из этого следует, что при $t \rightarrow \infty$ интеграл для $A_z(15)$ определяется при минимальных значениях $\eta_n(m)$, т. е. при $m \rightarrow 0$. Это значит, что на поздних временах значения поля определяются первым членом (15), который дает степенную зависимость от t , а остальные экспоненциально малы. (Мы здесь повторили рассуждение, использованное в [6] для получения поздней стадии.)

В случае идеально проводящего основания уравнение для k_n также имеет бесконечное число решений для каждого значения m

$$\operatorname{tg}(k_n \cdot h) = -\frac{k_n}{m}, \quad (17)$$

но среди них нет такого, чтобы $k_n \rightarrow 0$ при $m \rightarrow 0$, а это значит, что в пласте с идеально проводящим основанием поле спадает экспоненциально в поздней стадии.

Эти заключения о характере спада полей для непроводящего и идеально проводящего основания справедливы и для многослойных сред, поскольку это определяется условием для функции Z на нижней границе.

И, наконец, сделав замену переменной в (15),

$$m = k \cdot \operatorname{tg}(k \cdot h/2) \quad \text{при } 2\pi n \leq k \leq \pi(2n+1), \\ m = -k \cdot \operatorname{ctg}(k \cdot h/2) \quad \text{при } \pi(2n+1) < k \leq 2\pi(n+1), \\ n = 0, 1, 2, \dots,$$

получим для компонент поля удобные для расчета выражения:

$$E_r = \frac{M_z \mu}{4\pi} \cdot \int_0^{\infty} J_1(mr) \cdot m^2 \cdot k \cdot \exp\left[-\frac{t\rho}{\mu} \cdot (m^2 + k^2) - 2 \cdot m \cdot H\right] \cdot dk, \\ B_z = \frac{M_z \mu}{M_z} \cdot \int_0^{\infty} J_0(mr) \cdot \frac{m^3 \cdot k}{m^2 + k^2} \cdot \exp\left[-\frac{t\rho}{\mu} \cdot (m^2 + k^2) - 2 \cdot m \cdot H\right] \cdot dk, \quad (18) \\ B_r = -\frac{M_z \mu}{4\pi} \cdot \int_0^{\infty} J_1(mr) \cdot \frac{m^3 \cdot k}{m^2 + k^2} \cdot \exp\left[-\frac{t\rho}{\mu} \cdot (m^2 + k^2) - 2 \cdot m \cdot H\right] \cdot dk.$$

Здесь источник и приемник подняты на высоту H над пластом.

Горизонтальный электрический диполь (ГЭД)

Решение задачи об устанавливаемом поле, возбуждаемом горизонтальным электрическим диполем, расположенном на дневной поверхности однородного пласта конечной мощности (h, ρ) , подстилаемого изолятором, было впервые дано А. Н. Тихоновым в работе [6], где приведены выражения для поздней стадии компоненты E_x . В работе [4] тем же методом полученное решение для поздней стадии становления в трехслойной среде, причем диполь помещен в подошву первого слоя (морской вариант). Здесь мы для полноты приводим выражения для всех компонент поля.

Диполь помещен в начало координат в направлении оси X на дневной поверхности, ось Z направлена вниз. Потенциалы в этом случае вводятся следующим образом:

$$H = \operatorname{rot} A, \quad E = \operatorname{grad} \Phi - \mu \cdot \dot{A}, \quad (19)$$

где Φ — скалярный потенциал, определяемый как

$$\Phi = \rho \cdot \operatorname{div} A, \quad \text{если } \rho \neq \infty,$$

$$\operatorname{div} A = 0, \quad \text{если } \rho = \infty.$$

Компоненты вектора-потенциала определяются следующим образом:

$$A_x = \frac{I_x}{4\pi} \cdot \int_0^{\infty} J_0(mr) \cdot X(m, z, t) \cdot dm, \\ A_y = 0, \quad (20)$$

$$A_z = \frac{I_x}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\infty} J_0(mr) \cdot Z(m, z, t) \cdot dm \right],$$

где I_x — величина момента диполя, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Для компонент поля имеем следующие выражения:

$$E_x = \frac{I_x \rho}{4\pi} \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\int_0^{\infty} J_0(mr) \cdot \left(X + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \cdot dm \right] - \frac{t}{\rho} \cdot \int_0^{\infty} J_0(mr) \cdot \dot{X} \cdot dm \right], \\ E_y = \frac{I_x \rho}{4\pi} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\int_0^{\infty} J_0(mr) \cdot \left(X + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \cdot dm \right], \\ E_z = \frac{I_x \rho}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\infty} J_0(mr) \cdot Y \cdot dm \right], \quad (21) \\ B_x = \frac{I_x \mu}{4\pi} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\int_0^{\infty} J_0(mr) \cdot Z \cdot dm \right], \\ B_y = \frac{I_x \mu}{4\pi} \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\int_0^{\infty} J_0(mr) \cdot Z \cdot dm \right] - \int_0^{\infty} J_0(mr) \cdot \frac{\partial X}{\partial z} \cdot dm \right], \\ B_z = \frac{I_x \mu}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_0^{\infty} J_0(mr) \cdot X \cdot dm \right],$$

где для подынтегральных функций имеем:

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot m \cdot k_n \cdot [k_n \cos(k_n z) + m \sin(k_n z)]}{(m^2 + k_n^2) \cdot (2 \cdot m + h \cdot (m^2 + k_n^2))} \cdot e^{-(m^2 + k_n^2) \cdot \frac{t\rho}{\mu}}, \\ Y = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot n \cdot \frac{4 \cdot m \cdot \sin\left(\frac{\pi n z}{h}\right)}{(m^2 - h^2 + \pi^2 \cdot n^2)} \cdot e^{-(m^2 + \frac{\pi^2 n^2}{h^2}) \cdot \frac{t\rho}{\mu}}, \quad (22) \\ Z = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot k_n^2 \cdot [m \cos(k_n z) - k_n \sin(k_n z)]}{m \cdot (m^2 + k_n^2) \cdot (2 \cdot m + h \cdot (m^2 + k_n^2))} \cdot e^{-(m^2 + k_n^2) \cdot \frac{t\rho}{\mu}},$$

а k_n — решения уже известного уравнения

$$\operatorname{tg}(k_n \cdot h) = \frac{2 \cdot m \cdot k_n}{k_n^2 - m^2}.$$

Заметим, что компонента E_z отличается от всех других экспоненциальным спадом на поздних временах. Это согласуется с ниже рассмотренным поведением компоненты E_x поля, возбуждаемого вертикальным электрическим диполем.

Вертикальный электрический диполь (ВЭД)

Расчет становления поля ВЭД — область, где применение метода устанавливающихся пространственных гармоник особенно эффективно и даже эффективно. Вид выражений для поля позволяет легко заметить важнейшие особенности процесса и получить простой и быстрый алгоритм численного расчета. В работе [2] обсуждались некоторые результаты анализа устанавливающегося поля ВЭД на основе математического моделирования с применением описываемого метода. Здесь мы рассмотрим решение при использовании более сложной модели среды.

Рассмотрим среду, состоящую из однородного слоя (ρ, h), в котором содержатся проводящие плоскости S_1 и S_2 на глубинах h_1 и h_2 . В основании — изолятор. Источник — ВЭД с моментом I_z — помещен на глубину z_0 (рис. 2). В момент времени $t = 0$ источник выключается.

Вектор-потенциал вводим обычным для электрического источника образом:

$$H = \operatorname{rot} A. \quad (23)$$

В силу симметрии задачи достаточно иметь отличной от нуля только компоненту A_z , тогда в цилиндрической системе координат имеются

$$E_r = \rho \cdot \frac{\partial^2 A_z}{\partial r \partial z^2}, \quad H_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad E_z = -\mu \cdot \dot{A}_z + \rho \cdot \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}. \quad (24)$$

Компонента A_z должна удовлетворять достаточным условиям, обоснование которых можно найти, например, в [7]:

$$\Delta A_z = \frac{\mu}{\rho} \dot{A}_z, \quad 0 < z < h \quad (z \neq h_1, h_2), \quad 0 \leq r \leq \infty;$$

$\rho \cdot A_{zz}'$ непрерывно всюду, что означает $A_z(0) = A_z(h) = 0$; на S -границах имеем условия

$$[A_z'] \Big|_{z=h_i} = 0, \quad [A_z] \Big|_{z=h_i} = \rho \cdot S_i \cdot \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad i = 1, 2;$$

далее

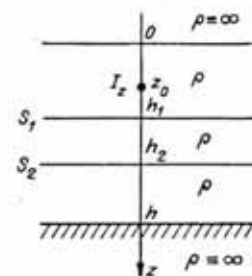


Рис. 2.

$A_z \rightarrow 0$ при $\sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty$;
 $A_z \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$;
 начальное условие — решение стационарной задачи.

Разделяя переменные в уравнении для A_z и учитывая условия для потенциала, будем искать решение в виде

$$A_z = \frac{I_z}{4\pi} \cdot \int_0^\infty J_0(mr) \cdot Z(m, z) \cdot dm. \quad (25)$$

Функция Z должна удовлетворять краевой задаче:

$$Z_z'' - m^2 \cdot Z = \frac{\mu}{\rho} \dot{Z}, \quad 0 < z < h \quad (z \neq h_1, h_2); \quad (26)$$

$$Z(0) = Z(h) = 0;$$

$$[Z_z'] \Big|_{z=h_i} = 0, \quad [Z] \Big|_{z=h_i} = -\rho \cdot S_i \cdot \frac{\partial Z}{\partial z}, \quad i = 1, 2;$$

$$Z \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty;$$

$$Z \rightarrow Z_0 \quad \text{при } t \rightarrow 0,$$

где Z_0 — стационарное решение, удовлетворяющее краевой задаче:

$$Z_{0z}'' = -m^2 \cdot Z_0 = 0, \quad 0 < z < h \quad (z \neq h_1, h_2);$$

$$Z_0(0) = Z_0(h) = 0; \quad (27)$$

$$[Z_{0z}'] \Big|_{z=x_0} = 2 \cdot m, \quad [Z_0] \Big|_{z=x_0} = 0;$$

$$[Z_{0z}'] \Big|_{z=h_i} = 0, \quad [Z_0] \Big|_{z=h_i} = -\rho \cdot S_i \cdot Z_{0z}', \quad i = 1, 2.$$

Мы не будем решать эту задачу, но воспользуемся ее условиями. Решение (26) ищем в виде

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot X_n(z) \cdot e^{-\alpha_n^2 + m^2} \cdot \frac{t}{\rho}. \quad (28)$$

Функции X_n должны удовлетворять условиям (индекс n опускаем):

$$X_z'' + k^2 \cdot X = 0, \quad 0 < z < h \quad (z \neq h_1, h_2); \quad (29)$$

$$X(0) = X(h) = 0;$$

$$[X_z'] \Big|_{z=h_i} = 0, \quad [X] \Big|_{z=h_i} = -\rho \cdot S_i \cdot X_z', \quad i = 1, 2.$$

Получаем решение в виде

$$X_i(z) = A_i \cdot \cos(k \cdot z) + B_i \cdot \sin(k \cdot z), \quad (30)$$

$$X_{iz}'(z) = -A_i \cdot k \cdot \sin(k \cdot z) + B_i \cdot k \cdot \cos(k \cdot z), \quad i = 1, 2, 3.$$

Применяя граничные условия (29), найдем коэффициенты A_i, B_i :

$$A_1 = 0,$$

$$B_1 = 1 \quad (\text{полагаем в силу однородности}),$$

$$A_2 = S_1 \cdot \rho \cdot k \cdot c_1^2,$$

$$B_2 = 1 + S_1 \cdot \rho \cdot c_1 \cdot s_1,$$

$$A_3 = S_1 \cdot \rho \cdot k \cdot c_1^2 + S_2 \cdot \rho \cdot k \cdot c_2^2 + S_1 \cdot S_2 \cdot \rho^2 \cdot k^2 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot (s_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot s_2), \quad (31)$$

$$B_3 = 1 + S_1 \cdot \rho \cdot k \cdot s_1 \cdot c_1 + S_2 \cdot \rho \cdot k \cdot s_2 \cdot c_2 +$$

$$+ S_1 \cdot S_2 \cdot \rho^2 \cdot k^2 \cdot c_1 \cdot s_2 \cdot (s_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot s_2),$$

$$\text{где } s_i = \sin(k \cdot h_i), \quad c_i = \cos(k \cdot h_i), \quad (i = 1, 2),$$

и получим уравнение для k :

$$A_3 \cdot \cos(k \cdot h) + B_3 \cdot \sin(k \cdot h) = 0. \quad (32)$$

Заметим, что решение задачи (29) не зависит от m .

В (28) остается определить коэффициенты C_n , которые должны обеспечить выполнение начального условия

$$Z_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot X_n(z). \quad (33)$$

Нетрудно убедиться, что функции X_n образуют ортогональную систему в области $0 \leq z \leq h$, так что

$$C_n = \frac{\int_0^h Z_0(z) \cdot X_n(z) dz}{\int_0^h X_n^2(z) dz} \quad (34)$$

Беря верхний и нижний интегралы по частям и учитывая условия задач для функций Z_0 (27) и X_n (29), получим

$$C_n = \frac{m}{m^2 + k_n^2} \cdot D_n \cdot X_n(z_0), \quad (35)$$

где D_n и $X_n(z_0)$ не зависят от m ,

$$D_n = \frac{4}{\frac{h}{k_n^2} \cdot \left(\frac{\partial X_n(h)}{\partial z} \right)^2 + \sum_{i=1}^2 \left\{ h_i \cdot \left[X_n^2 \right]_{h_i} + \frac{S_i \cdot \rho}{k_n^2} \cdot \left(\frac{\partial X_n(h_i)}{\partial z} \right)^2 \right\}}$$

Теперь можно представить решение для потенциала (25) в виде, удобном для расчетов:

$$A_z(r, z, t) = \frac{I_z}{4\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cdot X_n(z) \cdot X_n(z_0) \cdot G_n(r, t), \quad (36)$$

где z_0 — положение источника, r, z — координаты точки наблюдения, а

$$G_n = \int_0^{\infty} \frac{J_0(mr) \cdot m}{m^2 + k_n^2} \cdot e^{-(k_n^2 + m^2) \cdot \frac{t\rho}{\mu}} \cdot dm, \quad (37)$$

или ($\tau = t \cdot \rho / \mu$)

$$G_n = \int_0^{\infty} \frac{1}{2 \cdot \tau} \cdot e^{-k_n^2 \cdot \tau - \frac{m^2}{2\tau}} \cdot d\tau. \quad (38)$$

Таким образом, мы избавились от интегралов с осциллирующими функциями. Поскольку $0 < k_n < k_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$), ряд (36) быстро сходится (как и его производные), и основная проблема, легко, впрочем, решаемая, заключается в нахождении достаточного числа решений уравнения для k_n (32). Из

(37) нетрудно сделать вывод об экспоненциальном характере спада поля на поздних временах, причем показатель спада

— $k_1^2 \cdot \frac{\rho}{\mu}$ — зависит от всех параметров

разреза, что, как уже отмечалось в [2], приводит к уникальной разрешающей способности поля ВЭД. В отличие от поля магнитного диполя, для которого в поздней стадии существенна лишь суммарная проводимость разреза, поле ВЭД всегда зависит от вертикальной структуры разреза, и принцип эквивалентности для этого источника должен быть сформулирован совершенно иначе. Приведем интересный пример. На рис. 3 представлены три кривые (E_z), рассчитанные по полученному алгоритму ($\rho = 1, h = 1, 5, S_1 = 1, h_1 = 1, S_2 = 1, h_2 = 1, 25$). Кривая 1 — в слое две прово-

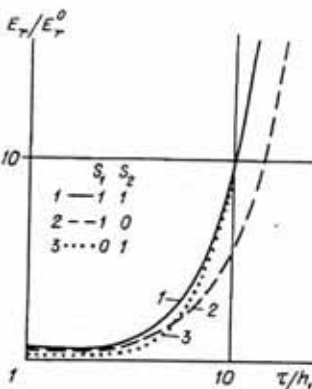


Рис. 3

дящие пластины, кривая 2 — нет нижней, кривая 3 — нет верхней. Кривые нормированы на кривую становления нормального поля (нет обеих пластин). В ранней стадии кривая для двух пластин близка к кривой 2 (верхняя пластина), что кажется естественным. Но в поздней стадии кривая 1 совпадает уже с кривой 3 (нижняя пластина), т. е. „работает“ только нижняя пластина, а наличие верхней игнорируется, что не является тривиальным фактом. Эти расчеты дублировались с использованием программы по алгоритму Шейнмана.

В заключение отметим, что все приведенные в статье алгоритмы программно реализованы именно в том виде, как они приведены здесь, как сформировались в процессе решения краевых задач. Мы убеждены, что имеется много резервов для создания еще более быстрых и простых алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ваньян Л. Л. Становление электромагнитного поля и его использование для решения задач структурной геологии. Новосибирск: Наука, 1966. 102 с.
2. Гольдман М. М., Могилатов В. С. Становление поля вертикального электрического диполя, погруженного в горизонтально-слоистое полупространство // Теория и опыт применения электромагнитных полей в разведочной геофизике. Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1978. С. 123—138.
3. Дмитриев В. И., Скугаревская О. А., Фролов П. П. Некоторые вопросы метода становления поля в ближней зоне. М.: Изд-во МГУ, 1973. 75 с.
4. Могилатов В. С. Поздняя стадия становления электромагнитного поля, возбуждаемого погруженным электрическим диполем // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1976. № 8. С. 103—107.
5. Тихонов А. Н. О становлении электрического тока в однородном проводящем полупространстве // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1946. Т. X, № 3. С. 213—231.
6. Тихонов А. Н., Скугаревская О. А. О становлении электрического тока в неоднородной среде. II // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1950. Т. XIV, № 4. С. 281—293.
7. Шейнман С. М. Об установлении электромагнитных полей в земле // Прикладная геофизика. 1947. Вып. 9. С. 3—55.

Поступила в редакцию 5 ноября 1991 г.

Y. S. Mogilatov

A WAY OF SOLVING FUNDAMENTAL DIRECT PROBLEM OF TES

The method proposed by A. N. Tikhonov for calculating electromagnetic field in the presence of horizontally layered ground is further developed in this paper. The method provides quick software for calculating the fundamental direct TES problem. It is demonstrated for various field sources.