

Учет двухосной анизотропии проводимости в геоэлектромагнитных зондированиях

© В. С. Могилатов, 2009

Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН,
Новосибирск, Россия

Поступила 18 мая 2009 г.

Представлено членом редколлегии В. Н. Шуманом

Наведено першы попередны результати математичного моделювання змінного електромагнітного поля в одновимірному шаруватому вередовищі з двовисною анизотропією провідності з довільним напрямком горизонтальних компонент провідності у кожному шарі. У прикладних дослідженнях для електромагнітного каротажу та електророзвідки середовище уявляється переважно або ізотропним, або із звичайною анизотропією провідності. Разом з тим є багато указань на те, що середовище може мати й двовисну анизотропію, тобто за всіма трьома напрямками X , Y , Z опори різні. Теоретичний розв'язок й алгоритм у такому випадку специфічні, й чисельна реалізація пов'язана з деякими проблемами. Створено програми розрахунку електромагнітних полів у частотному й часовому діапазонах та отримані цікаві результати з геоелектричної позиції, наприклад: поява вертикальної електричної компоненти поля під час збудження горизонтально-шаруватого розряду вертикальним магнітним диполем.

First preliminary results of mathematical simulation of alternating electromagnetic field in one-dimensional layered medium with biaxial anisotropy of conductivity with arbitrary direction of horizontal conductivities in each layer are given. In applied studies for electromagnetic logging and electrical prospecting the medium is suggested to be as a rule either isotropic or with ordinary anisotropy of conductivity. Meanwhile there are lots of indications that the medium may possess in addition even biaxial anisotropy, i. e. conductivities are different by all three directions — X , Y , Z . Theoretical solution and algorithm are in this case considerably specific and numerical realization is connected with a set of problems. The programs have been created for calculation of electromagnetic fields in frequency and temporal areas and interesting results have been obtained from geo-electrical viewpoint. For example, the appearance of vertical electric component of the field in case of excitation of horizontally layered section by vertical magnetic dipole.

Введение. Некоторые факты из области практической электроразведки указывают на существование анизотропии в горизонтальных сопротивлениях. Большой проблемой применения технологичной установки АВ- q является зависимость результатов от ориентации установки. Одна из возможных причин — анизотропия горизонтальных сопротивлений (если, конечно, исключены другие факторы). Математическое моделирование для геоэлектрики как на стадии проектирования, так и в процессе обработки полевых данных до сих пор учитывало только обычную анизотропию.

Предполагалось, что горизонтальное сопротивление одинаково во всех направлениях. Однако если задуматься, то зависимость горизонтального сопротивления от направления является как раз естественной. В процессе осадконакопления (образования формаций) всегда присутствуют господствующие по направлению факторы — атмосферные движения, течения воды. Также последующие изменения могут быть неизотропными (трещиноватость, например). В многослойной среде направление горизонтальной анизотропии, разумеется, может быть разным в каждом

слое. Такой взгляд уже является вполне обычным в электромагнитном каротаже, где среда, ее слоистость, рассматриваются весьма подробно.

При наземных электромагнитных зондированиях среда параметризуется более масштабно. Рассматриваются однородные многометровые слои (10—1000 м), которые являются результатом некоторого осреднения и в которых, возможно, горизонтальная анизотропия нивелируется, но, что также возможно, и остается существенной.

Таким образом, мы имеем теперь существенно более сложную геоэлектрическую модель среды, хотя и по-прежнему одномерную. Каждый слой описывается пятью параметрами — мощностью, три значения сопротивления (по трем направлениям — X, Y, Z) и угол направления горизонтальных сопротивлений. Математический аппарат соответственно усложняется, и возможности аналитического подхода оказываются почти исчерпанными.

Ранее проблема взаимодействия гармонического электромагнитного поля и двухосной анизотропной среды уже рассматривалась. Приведем, например, работы [Табаровский, Эпов, 1977 и Sheen, 2005]. Изучение решений для слоистой двухосно-анизотропной с точки зрения численной реализации привело нас к необходимости построить свое собственное решение, которое приводится в Приложении.

Расчеты в частотной области и тестирование. По полученному решению была написана программа BIAMAG2 (FORTRAN). Основные проблемы нового алгоритма по сравнению с алгоритмами для обычной анизотропии связаны с двумя обстоятельствами. Первое состоит в том, что вместо одномерного преобразования Ханкеля вынуждены применять двойное преобразование Фурье. Это требует гораздо больше времени для расчетов. Вторая трудность возникает из-за связи магнитной и электрической мод (точнее, из-за связи h_z и e_z). Численная реализация рекур-

сивных алгоритмов в многослойных средах при этом становится менее устойчивой и требует дополнительных мер.

Отладка и тестирование программы BIAMAG2 производились на основе сравнений расчетов с методом конечных элементов (the finite element discretization — FED), которые предоставил А. Беспалов (Хьюстон, США), проведенными для трехслойной среды с разными направлениями анизотропии в каждом слое (табл. 1).

На рис. 1 приводится это сравнение для двух частот мнимых частей магнитных компонент H_x от горизонтального (M_x) и H_z от вертикального (M_z) магнитных диполей (ГМД

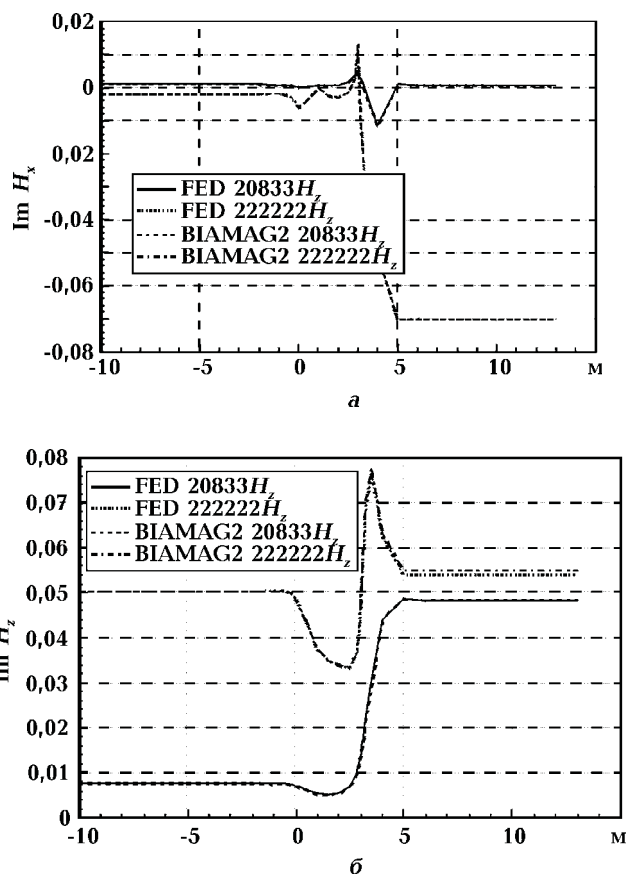


Рис. 1. Сравнение расчетов по программе BIAMAG2 и методом FED: а — положение ГМД, м; б — положение ВМД, м.

Т а б л и ц а 1

Номер слоя	$\rho_x, \text{ Ом} \cdot \text{ м}$	$\rho_y, \text{ Ом} \cdot \text{ м}$	$\rho_z, \text{ Ом} \cdot \text{ м}$	Угол, град.	Мощность, м
0	1	2	4	30	верхнее полу-пространство
1	2	3	20	0	3
2	0,1	0,2	0,3	- 30	нижнее полу-пространство

и ВМД). На горизонтальной оси отложены положения источника, который располагается на 1 м ниже точки наблюдения по вертикали. Первая граница среды расположена на уровне 0.

Результаты тестирования показывают, что разработанный алгоритм вполне удовлетворительно (в прикладном смысле), даже если отнести все расхождения на счет программы VIAMAG2, обеспечивает расчет всех компонент гармонического электромагнитного поля наклонного магнитного диполя в двухосно-анизотропной среде. Причем расчеты (VIAMAG2 и FED) сделаны именно в классе "двухосных" моделей и расхождение между ними много меньше влияния самого факта горизонтальной анизотропии.

Другое тестовое сравнение, интересное с точки зрения применимости развитого алгоритма в условиях наземной геоэлектрики, было проведено для модели, показанной на рис. 2.

В этом случае установка была неподвижной, а расчеты были проведены для серии частот. Источник (ВМД) располагался на границе между практически изолирующим полупространством и проводящим двухосно-анизотропным слоем, подстилаемым проводящим изотропным полупространством. Поле (H_z) наблюдалось на второй границе. Как и в предыдущем примере, расчеты сравнивались с расчетами по методу конечных элементов (А. Беспалов).

Расчеты во временной области. Программа VIAMAG2 была написана, прежде всего, для целей индукционного каротажа. На ее основе несложно создать процедуру расчета поля установления. Во временной области не было возможности провести нетривиальное (т. е. именно для двухосно-анизотропной модели) тестирование. Однако используя хорошо проверенную процедуру в частотной области и применяя совершенно стандартные процедуры численной трансформации Фурье, давно используемые в известных системах

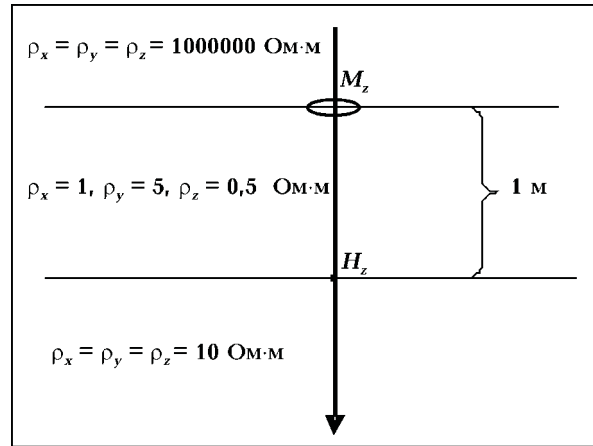


Рис. 2. Модель среды, положение источника и точки наблюдения в тестовом расчете.

обработки электроразведочных данных ("Подбор", "Выбор-ЗС"), авторы статьи вполне уверены в результатах. Именно в переходном режиме продемонстрируем новый феномен, возникающий в двухосно-анизотропной среде.

В табл. 2 представлен трехслойный разрез, второй слой которого обладает двухосной анизотропией. Источником служит вертикальный магнитный диполь ($M_z = 1013 \text{ A} \cdot \text{m} \cdot \text{m}$), помещенный на дневной поверхности. Наблюдение ведем на глубине 200 м, т. е. на второй границе в точке с координатами $x = 200 \text{ м}$, $y = 200 \text{ м}$ (поскольку вертикальные сопротивления одинаковы, неважно — снизу или сверху границы). Диапазон регистрации отклика от 1 мс до 5 с. На рис. 3 представлены кривые становления для всех трех компонент электрического поля — E_x , E_y , E_z . Как видим, вертикальная компонента, которая в обычной изотропной или анизотропной с одной осью среде отсутствует, здесь вполне сравнима с горизонтальными.

Геофизики, даже не электроразведчики, хорошо знают некоторые факты электроразведки методом зондирования становлением (ЗС) такие, как возбуждение только горизонтальной системы вторичных токов в земле,

Т а б л и ц а 2

Номер слоя	Мощность, м	ρ_x , Ом · м	ρ_y , Ом · м	ρ_z , Ом · м
1	200	5	5	5
2	100	0,1	1	5
3	8	100	100	100

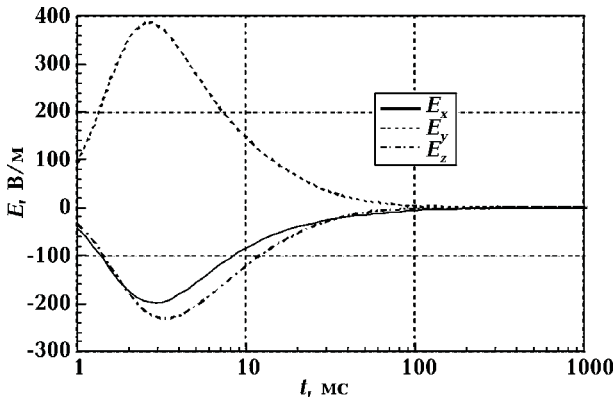


Рис. 3. Кривые становления всех компонент градиента электрического поля.

если источник — токовая петля, располагаемая на горизонтальной поверхности (дневной, например). Но для двухосно-анизотропной среды это, как видим, несправедливо. Теоретически этот результат, конечно, нетрудно получить. Однако наши расчеты дают количественную оценку, которая показывает, что эффект может быть весьма существенным.

Горизонтальный электрический диполь.

Большой проблемой применения технологичной установки АВ-q является зависимость результатов от ориентации установки. Из практики известны случаи, когда профили работ с этой установкой пересекались, что приводило к серьезным проблемам при интерпретации и сдаче материала, поскольку в точке пересечения появлялись совершенно разные результаты. Одна из возможных причин — анизотропия горизонтальных сопротивлений.

Для прояснения этой ситуации авторами сделана модификация программы расчета процесса установления для горизонтального электрического диполя (ГЭД). Приведем самые первые и предварительные результаты. Здесь представлены кривые становления электромагнитного поля ГЭД (dB_z/dt), помещенного на поверхность трехслойной среды (табл. 3). Второй слой берется изотропным (2-2-2), а

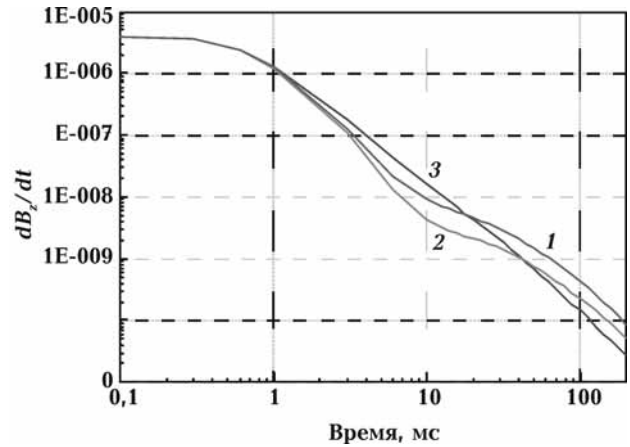


Рис. 4. Кривые становления (ЭДС) установки АВ-q при разной анизотропии второго слоя: 1 — dB_z/dt_{2_2} , 2 — dB_z/dt_{2_200} , 3 — dB_z/dt_{200_2} .

также обладающим сильной (трещиноватость) двухосной анизотропией (2-200-2 и 200-2-2), что эквивалентно разной (на 90 град.) ориентации установки АВ-q. Различие в переходных процессах весьма существенное (рис. 4).

Заключение. Появление вертикальной компоненты электрического поля, притом существенной, при возбуждении горизонтальным токовым контуром — факт, который может иметь разнообразные и неожиданные последствия. Например, сторонники "тонких эффектов" и "сверхразрешения" могли бы попытаться использовать этот эффект для своей аргументации. Автору пришла в голову мысль о возможном резком увеличении способности возбуждать процессы вызванной поляризации незаземленными контурами. Впрочем, эти возможности весьма зависят от наличия и распространенности двухосной-анизотропии проводимости в геосреде.

Ясно, что вопрос о влиянии горизонтальной анизотропии на поле заземленной электрической линии имеет еще большее практическое значение. Интерпретация в классе двухосно-анизотропных сред может снять противоречие в результатах при разной ориентации установки и дать ценную информацию о направлении трещиноватости.

Т а б л и ц а 3

Номер слоя	Мощность, м	$\rho_x, \text{ Ом} \cdot \text{ м}$	$\rho_y, \text{ Ом} \cdot \text{ м}$	$\rho_z, \text{ Ом} \cdot \text{ м}$
1	500	50	50	50
2	200	2	2	2
3	8	20	20	20

Приложение

Приведем решение, когда источник — магнитный диполь.

Однородное пространство. Рассмотрим гармоническое электромагнитное поле в однородной анизотропной среде с двухосной анизотропией. Горизонтальные направления анизотропии не совпадают с направлениями осей системы координат и расходятся на угол α (рис. 5):

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где

$$\sigma_{xx} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha,$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_2 \cos^2 \alpha + \sigma_1 \sin^2 \alpha,$$

$$\sigma_{xy} = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha \sin \alpha,$$

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_z.$$

Рассмотрим однородную систему уравнений Максвелла (в квазистационарном приближении):

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = \hat{\sigma} \mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu \mathbf{H}, \\ \text{div } \mathbf{H} = 0, \\ \text{div } (\hat{\sigma} \mathbf{E}) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

всюду, кроме точек со сторонним током.

Отделим латеральные координаты, применив к задаче двойное преобразование Фурье:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, z) e^{i\xi x} e^{i\eta y} d\xi d\eta. \quad (3)$$

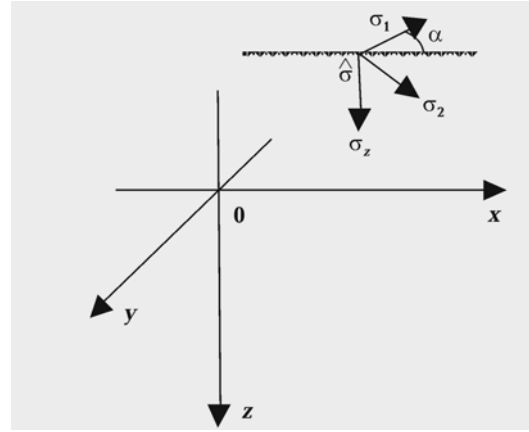


Рис. 5. Система координат и модель анизотропии.

В пространстве гармоник получим одномерную задачу

$$\begin{cases} i\eta h_z - (h_y)'_z = \sigma_{xx} e_x + \sigma_{xy} e_y, \\ (h_x)'_z - i\xi h_z = \sigma_{yx} e_x + \sigma_{yy} e_y, \\ i\xi h_y - i\eta h_x = \sigma_z e_z, \\ i\eta e_z - (e_y)'_z = i\omega\mu h_x, \\ (e_x)'_z - i\xi e_z = i\omega\mu h_y, \\ i\xi e_y - i\eta e_x = i\omega\mu h_z, \\ i\xi \sigma_{xx} e_x + i\xi \sigma_{xy} e_y + i\eta \sigma_{yx} e_x + \\ + i\eta \sigma_{yy} e_y = -\sigma_z (e_z)'_z, \\ i\xi h_x + i\eta h_y = -(h_z)'_z. \end{cases} \quad (4)$$

Решаем сначала систему (4) в однородной области, не содержащей источники (однородная задача). Выберем из системы уравнений (4) четыре уравнения:

$$\begin{cases} i\xi h_y - i\eta h_x = \sigma_z e_z, \\ i\xi \sigma_{xx} e_x + i\xi \sigma_{xy} e_y + i\eta \sigma_{yx} e_x + \\ + i\eta \sigma_{yy} e_y = -\sigma_z (e_z)'_z, \\ i\xi e_y - i\eta e_x = i\omega\mu h_z, \\ i\xi h_x + i\eta h_y = -(h_z)'_z, \end{cases} \quad (5)$$

которые представляют выражения горизонтальных компонент через вертикальные. Или,

$$\begin{cases} \xi b_y - \eta b_x = j, \\ \xi k_1 e_x + \eta k_2 e_y = -j', \\ \xi e_y - \eta e_x = b, \\ \xi b_x + \eta b_y = -b', \end{cases} \quad (6)$$

где

$$k_1 = k_{xx} + \frac{\eta}{\xi} k_{yx}, \quad k_2 = \frac{\xi}{\eta} k_{xy} + k_{yy},$$

$$j = k_{zz} e_z, \quad b_\alpha = \mathbf{i}\omega\mu h_\alpha, \quad k_{ab} = \mathbf{i}\omega\mu \sigma_{ab}, \quad b = b_z,$$

f' означает производную по z . Запишем ξ и η вместо $\mathbf{i}\xi$ и $\mathbf{i}\eta$. Получим следующие выражения для горизонтальных компонент:

$$b_x = -\frac{1}{\lambda^2} (\eta j + \xi b'), \quad e_x = -\frac{1}{t^2} (\xi j' + \eta k_2 b), \quad (7)$$

$$b_y = \frac{1}{\lambda^2} (\xi j - \eta b'), \quad e_y = -\frac{1}{t^2} (\eta j' - \xi k_1 b),$$

где $\lambda^2 = \xi^2 + \eta^2$, $t^2 = \xi^2 k_1 + \eta^2 k_2$.

Таким образом, следует найти сначала b и j , для чего возьмем из системы (4) два неиспользованных еще уравнения. Например (в наших обозначениях),

$$\begin{cases} \eta b - b'_y = k_{xx} e_x + k_{xy} e_y, \\ e'_x - \xi \frac{j}{k_{zz}} = b_y, \end{cases} \quad (8)$$

Подставляя сюда выражения для горизонтальных компонент (7) и учитывая, что частное решение для любой компоненты есть $C \exp(pz)$, получаем однородную систему для определения b и j :

$$b\eta \left[\lambda^2 + \frac{\lambda^2}{t^2} (k_{xx} k_{yy} - k_{xy} k_{yx}) + p^2 \right] + j p \xi \left(\frac{\lambda^2}{t^2} k_1 - 1 \right) = 0, \quad (9)$$

$$b p \eta \left(\frac{\lambda^2}{t^2} k_2 - 1 \right) + j \xi \left(\frac{\lambda^2}{t^2} p^2 + 1 + \frac{\lambda^2}{k_z} \right) = 0.$$

Определитель этой системы должен быть равен 0 и это дает уравнение для p :

$$p^4 + b p^2 + c = 0, \\ b = \frac{t^2}{k_z} + \lambda^2 + \lambda^2 \frac{\delta - k_1 k_2}{t^2} + k_1 + k_2,$$

$$c = \left(\frac{t^2}{k_z} + \frac{\delta}{k_z} \right) (\lambda^2 + k_z) = 0,$$

$$\delta = k_{xx} k_{yy} - k_{xy} k_{yx}. \quad (10)$$

Получим также соотношение для b и j :

$$j = -\xi \eta p \frac{k_z (k_2 - k_1)}{\lambda^2 p^2 k_z + t^2 (\lambda^2 + k_z)} b. \quad (11)$$

Уравнение (10) является квадратным для p^2 , откуда следуют четыре решения: $\pm p_1, \pm p_2$, что дает такое общее решение для каждой компоненты:

$$f = C_1 \exp(p_1 z) + C_2 \exp(-p_1 z) + \\ + C_3 \exp(p_2 z) + C_4 \exp(-p_2 z).$$

Условия на границе. Рассмотрим теперь горизонтальную границу, разделяющую однородные области среды с разным тензором проводимости. На такой границе (не содержащей сторонних токов) непрерывны горизонтальные компоненты и это, с учетом (4) и (7), дает следующие условия сопряжения для введенных функций b и j и их производных:

$$\begin{aligned} [b] \Big|_{z=z_i} &= 0, \\ [b'] \Big|_{z=z_i} &= 0, \\ [j] \Big|_{z=z_i} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$[j'/t^2] \Big|_{z=z_i} = \xi \eta \frac{k_{12} k_{21} - k_{11} k_{22}}{t_1^2 t_2^2} b,$$

где k_α и t^2 определены выше, а индексы 1, 2 относятся к нижней и верхней среде по отношению к границе ($z = z_i$).

Учет источника. Учетом источник, помещенный возможно и на границе раздела двух сред в точке $z = z_0$, — магнитный диполь. Если диполь вертикальный, то его можно представить как частный случай произвольного распределения поверхностного стороннего тока в плоскости $z = z_0$ (А/м). Условия сопряжения электромагнитного поля на такой границе физически прозрачны:

$$\begin{aligned} [H_x] \Big|_{z=z_0} &= -j_y^E(x, y), \\ [H_y] \Big|_{z=z_0} &= j_x^E(x, y), \\ [E_x] \Big|_{z=z_0} &= 0, \\ [E_y] \Big|_{z=z_0} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассматривая вертикальный диполь как маленькую токовую петлю в полярной системе координат, имеющую только $j_\phi^E(r)$, причем $j_\phi^E(r) = I\delta(r-a)$, нетрудно получить в пространстве Фурье-образов условие

$$[h'_z] \Big|_{z=z_l} = -M_z \lambda^2, \quad (14)$$

где $M_z = \pi a^2$.

Горизонтальный магнитный диполь рассмотрим как частный случай произвольного распределения поверхностного стороннего магнитного тока в плоскости $z = z_0$ (в Амперах). Условиями сопряжения электромагнитного поля на такой границе будут

$$\begin{aligned} [E_x] \Big|_{z=z_0} &= \mathbf{i}\omega\mu j_y^M(x, y), \\ [E_y] \Big|_{z=z_0} &= -\mathbf{i}\omega\mu j_x^M(x, y), \\ [H_x] \Big|_{z=z_0} &= 0, \\ [H_y] \Big|_{z=z_0} &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

или, в пространстве гармоник,

$$\begin{aligned} [e_x] \Big|_{z=z_0} &= \mathbf{i}\omega\mu M_y, \\ [e_y] \Big|_{z=z_0} &= -\mathbf{i}\omega\mu M_x. \end{aligned} \quad (16)$$

Согласно этим условиям и пользуясь выражениями горизонтальных компонент через вертикальные (7), получим условия сопряже-

ния для введенных функций b и j ($j = k_z e_z$, $b = \mathbf{i}\omega\mu h_z$):

1) вертикальный магнитный диполь (M_z)

$$\begin{aligned} [b] \Big|_{z=z_0} &= 0, \\ [b'] \Big|_{z=z_0} &= \mathbf{i}\omega\mu \lambda^2 M_z, \\ [j] \Big|_{z=z_0} &= 0, \\ [j'/t^2] \Big|_{z=z_0} &= \xi\eta \frac{k_{12} k_{21} - k_{11} k_{22}}{t_1^2 t_2^2} b, \end{aligned} \quad (17)$$

2) горизонтальный магнитный диполь (M_x)

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{t^2} (\eta j' - \xi k_1 b) \right] \Big|_{z=z_0} &= \mathbf{i}\omega\mu M_x, \\ [b'] \Big|_{z=z_0} &= 0, \\ [j] \Big|_{z=z_0} &= 0, \\ \left[\frac{1}{t^2} (\xi j' + \eta k_2 b) \right] \Big|_{z=z_0} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

3) горизонтальный магнитный диполь (M_y)

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{t^2} (\eta j' - \xi k_1 b) \right] \Big|_{z=z_0} &= 0, \\ [b'] \Big|_{z=z_0} &= 0, \\ [j] \Big|_{z=z_0} &= 0, \\ \left[\frac{1}{t^2} (\xi j' + \eta k_2 b) \right] \Big|_{z=z_0} &= -\mathbf{i}\omega\mu M_y. \end{aligned} \quad (19)$$

Напомним, что

$$\begin{aligned} k_1 &= k_{xx} + \frac{\eta}{\xi} k_{yx}, \quad k_2 = \frac{\xi}{\eta} k_{xy} + k_{yy}, \\ k_{xy} &= k_{yx}, \quad k_{zz} \equiv k_z, \quad j = k_{zz} e_z, \quad b_\alpha = \mathbf{i}\omega\mu h_\alpha, \\ k_{ab} &= \mathbf{i}\omega\mu \sigma_{ab}, \quad b = b_z, \end{aligned}$$

f' означает производную по z , а вместо $i\xi$ и $i\eta$ пишем ξ и η .

Формулы (17)—(19) выражают условия сопряжения в самом общем виде, когда источник помещен на реальную границу раздела сред с разными параметрами. Если источника нет, то получим условия перехода границы без источника (12). Кроме того, если источник находится в однородной среде, то условия можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} [b] \Big|_{z=z_0} &= i\omega\mu (\xi M_x + \eta M_y), \\ [b'] \Big|_{z=z_0} &= i\omega\mu \lambda^2 M_z, \\ [j] \Big|_{z=z_0} &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

$$[j'] \Big|_{z=z_0} = -i\omega\mu (\eta k_2 M_x - \xi k_1 M_y).$$

Рекурсии. Рассмотрим один из ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) N -слоев горизонтально-слоистой геоэлектрической модели. В каждом однородном слое (индекс i опускаем) решим квадратное уравнение для p^2 :

$$p^4 + b p^2 + c = 0,$$

$$b = \frac{t^2}{k_z} + \lambda^2 + \lambda^2 \frac{\delta - k_1 k_2}{t^2} + k_1 + k_2,$$

$$c = \left(\frac{t^2}{k_z} + \frac{\delta}{k_z} \right) (\lambda^2 + k_z) = 0,$$

$$\delta = k_{xx} k_{yy} - k_{xy} k_{yx}$$

и получим четыре решения: $\pm p_1, \pm p_2$. Это значит, что в однородном слое решение нужно искать в виде

$$\begin{aligned} b &= C_1 \exp(p_1 z) + C_2 \exp(-p_1 z) + C_3 \exp(p_2 z) + C_4 \exp(-p_2 z), \\ b' &= C_1 p_1 \exp(p_1 z) - C_2 p_1 \exp(-p_1 z) + C_3 p_2 \exp(p_2 z) - C_4 p_2 \exp(-p_2 z), \\ j &= C_1 \alpha_1 \exp(p_1 z) - C_2 \alpha_1 \exp(-p_1 z) + C_3 \alpha_2 \exp(p_2 z) - C_4 \alpha_2 \exp(-p_2 z), \\ j' &= C_1 p_1 \alpha_1 \exp(p_1 z) + C_2 p_1 \alpha_1 \exp(-p_1 z) + C_3 p_2 \alpha_2 \exp(p_2 z) + C_4 p_2 \alpha_2 \exp(-p_2 z), \end{aligned}$$

воспользовавшись связью, возникающей в двухосно-анизотропной среде:

$$j = \alpha b,$$

$$\alpha = -\xi\eta p \frac{k_z (k_2 - k_1)}{\lambda^2 p^2 k_z + t^2 (\lambda^2 + k_z)}.$$

Коэффициенты C_1, C_2, C_3, C_4 можно выразить через значения наших функций b, b', j, j' на нижней или верхней границе слоя и получить, таким образом, алгоритм пересчета функций с одного уровня на другой при движении по области вниз или вверх. Итак

$$b_- = p c_1 - r s_1 + s c_2 - t s_2,$$

$$b'_- = p p_1 c_1 - r p_1 s_1 + s p_2 c_2 - t p_2 s_2,$$

$$j_- = p \alpha_1 c_1 - r \alpha_1 s_1 + s \alpha_2 c_2 - t \alpha_2 s_2,$$

$$j'_- = p \alpha_1 p_1 c_1 - r \alpha_1 p_1 s_1 +$$

$$+ s \alpha_2 p_2 c_2 - t \alpha_2 p_2 s_2, \tag{21}$$

где $s_{1,2} = u \cdot \text{sh}(p_{1,2} h)$, $c_{1,2} = \text{ch}(p_{1,2} h)$, $u = 1$ (если движемся "вниз", т.е. выражаем значения на нижнем уровне через значения на верхнем, а $u = -1$ (если движемся "вверх"), h — шаг пересчета по оси z (в частности, мощность слоя) и

$$p = \frac{b p_2 \alpha_2 - j'}{p_2 \alpha_2 - p_1 \alpha_1}, \quad r = \frac{b' \alpha_2 - j p_2}{p_2 \alpha_1 - p_1 \alpha_2},$$

$$s = \frac{b' \alpha_1 - j p_1}{p_2 \alpha_1 - p_1 \alpha_2}, \quad t = \frac{b p_1 \alpha_1 - j'}{p_2 \alpha_2 - p_1 \alpha_1}.$$

Теперь можно "двигаться" по области вверх и вниз, пользуясь пересчетом на шаг h (21) и

переходя границы с условиями (12). Далее алгоритм состоит в том, чтобы определить решение в верхнем полупространстве как $b = A \exp(p_{01}z) + B \exp(p_{02}z)$, а в нижнем — как $b =$

$C \exp(-p_{N1}z) + D \exp(-p_{N2}z)$ и двигаться к источнику снизу и сверху. Коэффициенты A, B, C, D найдем согласно условиям в источнике (17)—(19) или (20).

Список литературы

Табаровский Л.А., Эпов М.И. Электромагнитное поле гармонических источников в слоистой анизотропной среде // Геология и геофизика. — 1977. — № 1. — С. 101—109.

Sheep J. Time Harmonic Electromagnetic fields in an Biaxial Anisotropic Medium // J. Electromagn. Waves and Appl. — 2005. — **19**, № 6. — P. 753—767.