

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ЗОНДИРОВАНИЙ СТАНОВЛЕНИЕМ ПОЛЯ ПРИ УЧЕТЕ ТОКОВ СМЕЩЕНИЯ

© 1997 г. В. С. Могилатов

*Сибирский научно-исследовательский институт геологии, геофизики и минерального сырья,
г. Новосибирск*

Поступила в редакцию 02.02.95 г.

ВВЕДЕНИЕ

Математический аппарат метода зондирования становлением электромагнитного поля (ЗС) базируется на решении уравнений Максвелла в квазистационарном приближении, в пренебрежении токами смещения. Обоснование этого приближения, причем более полное, чем в последующих публикациях, дано в фундаментальной работе [1]. Практика ЗС до сих пор не давала серьезных стимулов для развития математического аппарата с учетом токов смещения. Однако, традиционные методики исчерпывают себя, вместе с тем технические возможности растут, становятся доступными для точных измерений сверхранние, наносекундные стадии процесса становления. Для анализа возможностей метода ЗС в сверхшироком диапазоне времен хотелось бы иметь базовый математический аппарат в такой же интегральной форме, как и в квазистационарном приближении. Это позволило бы проанализировать закономерности в самом общем виде и получить достаточно оперативные процедуры расчета полей в горизонтально-слоистых средах. Нельзя сказать, что интегральные представления решения задачи о становлении электромагнитного поля в горизонтально-однородной среде с учетом токов смещения неизвестны. Такое решение можно представить в виде интегрального преобразования Фурье решений для гармонического режима, которые давно получены (например [2]). Весьма общие представления даны в работе [3]. Однако, численная реализация этих решений задача очень непростая.

Мы здесь предлагаем решения для самых простых сред с одной и двумя границами. Эти решения могут быть полезны для некоторого предварительного геофизического анализа, могут использоваться для тестирования расчетов по более общим алгоритмам (сеточным и интегральным), а также послужить основой или составной частью общего алгоритма для горизонтально-слоистой среды.

СРЕДА С ОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Среда имеет одну границу ($z = 0$), разделяющую однородные полупространства (рис. 1). На оси z в верхнем полупространстве помещен вертикальный магнитный диполь с моментом M_z в точку $z = z_0$ цилиндрической системы координат с осью z , направленной вверх, в "воздух", хотя пока считаем параметры верхнего и нижнего полупространств произвольными (кроме магнитной проницаемости, равной всюду проницаемости вакуума).

Возбуждаем устанавливающееся поле выключением тока в нулевой момент времени. После выключения тока, при $t > 0$, необходимо решить систему уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{E} / \rho + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Вводим вектор-потенциал

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \Delta \mathbf{A} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}, \quad (2)$$

или, имея в цилиндрической системе координат только A_z ,

$$E_\varphi = -\frac{\partial^2 A_z}{\partial r \partial t}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right), \quad B_r = -\frac{\partial^2 A_z}{\partial r \partial z}. \quad (3)$$

Для A_z получаем условия

$$\Delta A_z = \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2}, \quad t > 0; \quad (4)$$

$$[A_z]_{z=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial A_z}{\partial z} \right]_{z=0} = 0,$$

$$A_z \rightarrow 0, \text{ если } t \rightarrow \infty \text{ или } R = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2} \rightarrow \infty,$$

$$A_z = \frac{M_z \mu_0}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}}, \quad \text{при } t \leq 0.$$

Решаем эту задачу, разделяя переменные и сводя к одномерной:

$$A_z = \frac{M_z \mu_0}{4\pi} \int_0^\infty J_0(mr) Z(t, z, m) dm, \quad (5)$$

где для функции Z имеем (режим выключения):

$$\begin{aligned} Z_{zz}'' - m^2 Z &= \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial Z}{\partial t} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}, \\ t > 0, \quad -\infty \leq z \leq \infty; \\ [Z]|_{z=0} &= 0, \quad \left[\frac{\partial Z}{\partial z} \right]_{z=0} = 0; \\ Z &= \exp(-m|z - z_0|), \quad t \leq 0; \\ Z &\rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что уравнение для функции Z в отличие от квазистационарного случая гиперболического типа. Разделяем переменные дальше, переходя в частотный режим:

$$Z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty X(z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (7)$$

Рассмотрим два конкретных случая, имеющих практическое значение. В первом случае (а) поместим источник на границу двух сред ($z_0 = 0$) и рассмотрим решение в верхнем полупространстве

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty A_0(\omega) e^{-n_0 z} e^{-i\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{2m}{i\omega(n_0 + n_1)} e^{-n_0 z} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (8) \\ n_j^2 &= m^2 + K_j^2. \end{aligned}$$

Во втором случае (b) поместим источник и приемник на высоту h над границей полупространств ($z = z_0 = h$) и получим квазидвухслойную модель, у которой первый слой мощностью h , имеет те же значения удельного сопротивления и диэлектрической проницаемости, что и у верхнего полупространства (воздух, например), основание произвольное, а приемно-питающая установка на дневной поверхности. Весьма важно, что это модель с отражающей границей:

$$\begin{aligned} Z_b &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0} e^{-2n_0 h} + \right. \\ &\left. + \frac{2}{(n_0 + n_1)} e^{-2n_0 h} \right] \frac{m}{i\omega} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (9) \end{aligned}$$

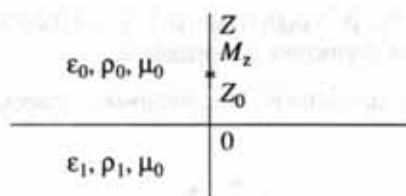


Рис. 1. Модель среды с одной границей.

Выражения (8) и (9) являются решениями краевой задачи (6). Фактически мы получили известные решения, приведенные, например, в [4]. Излагая здесь полное решение, мы хотели бы указать на то, что представление решения одномерной задачи (6) в виде (7) необязательно и, более того, неперспективно, если иметь в виду перспективу численных расчетов. Вид выражений (8) и (9) не меняется при переходе к квазистационарному приближению. Только вместо

$$k_j^2 = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_j - i\omega \mu_0 / \rho_j, \quad (10)$$

имеем

$$k_j^2 = -i\omega \mu_0 / \rho_j, \quad j = 0, 1. \quad (11)$$

Однако, это сходство весьма обманчиво. В квазистационарном приближении реальная часть n_j растет, а мнимая ограничена при росте частоты. При учете токов смещения, напротив, реальная часть n_j ограничена, а мнимая – растет. Практически, это значит, что численные расчеты по формулам (8), (9) в случае квазистационарного приближения легко реализуются, а при учете токов смещения невозможны без каких-либо трансформаций. Итак, цель дальнейших преобразований заключается в получении выражений для функций Z_a и Z_b , более удобных для численного анализа.

Рассмотрим сначала выражение (8), причем будем вычислять производную по времени функции Z_a следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_a &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{2m}{n_0 + n_1} e^{-n_0 z} e^{-i\omega t} d\omega = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty 2m \frac{n_0 - n_1}{k_0^2 - k_1^2} e^{-n_0 z} e^{-i\omega t} d\omega = 2m \int_{-\infty}^\infty g(t - \tau) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (n_0 - n_1) e^{-n_0 z} e^{-i\omega \tau} d\omega \right\} d\tau. \quad (12) \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались теоремой о свертке для преобразования Фурье, а функция

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{k_0^2 - k_1^2} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{\bar{\rho}}{\mu_0} (1 - e^{-2\bar{\rho} t}) u(t), \quad (13)$$

где $\bar{\epsilon} = \epsilon_1 - \epsilon_0$, $\bar{\rho} = \rho_0 \rho_1 / (\rho_0 - \rho_1)$, $\bar{\gamma} = 1 / (2\bar{\rho} \bar{\epsilon})$, $u(t)$ – ступенчатая функция Хевисайда.

Для дальнейшего необходимо рассмотреть функцию

$$F_j(t, z, m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-n_j z}}{n_j} e^{-i\omega t} d\omega = \quad (14)$$

$$= \frac{e^{-\gamma_j t}}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_j}} I_0(a_j \sqrt{t^2 - T_j^2}) u(t - T_j),$$

где

$$n_j^2 = m^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_j - i\omega \mu_0 / \rho_j,$$

$$\gamma_j = 1 / (2\epsilon_j \rho_j), \quad T_j = z \sqrt{\mu_0 \epsilon_j},$$

$$a_j = \sqrt{\gamma_j^2 - m^2 / (\mu_0 \epsilon_j)}, \quad j = 0, 1.$$

Интеграл сводится к табличному обратному преобразованию Лапласа (например, [5]) после замены $i\omega = \gamma_j - s$. I_0 – функция Бесселя (модифицированная).

Функция F (и ее производные) играет фундаментальную роль в математическом описании процессов установления электромагнитного поля в горизонтально-слоистых средах с учетом токов проводимости. В работе [6] эта функция использовалась для описания процесса становления в однородном пространстве. В [7] функция F возникает при решении одномерной ограниченной задачи.

Итак, пользуясь соотношением (14) и, снова, теоремой о свертке, получим:

$$\dot{Z}_a(t, z, m) = 2m \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) \left\{ \frac{\partial^2 F_0(\tau, z, m)}{\partial z^2} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 F_1(\tau - \tau', 0, m)}{\partial z^2} \frac{\partial F_0(\tau', z, m)}{\partial z} d\tau' \right\} d\tau. \quad (15)$$

Для \dot{Z}_b (источник и точка наблюдения на высоте h над границей) получим соответственно:

$$\dot{Z}_b(t, m) = F_0(t, 0, m) - F_0(t, 2h, m) + \dot{Z}_a(t, 2h, m). \quad (16)$$

Мы нашли решение краевой задачи (6) в виде (8), а потом преобразовали в (15) и на первый взгляд достигли немногого, особенно, если учесть появление двойного интеграла. Однако выражение (15) без особых проблем поддается численному анализу, в отличие от (8).

ИСТОЧНИК И ПРИЕМНИК НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

Рассмотрим практически интересный случай, когда источник – вертикальный магнитный диполь расположен на поверхности однородной Земли. Поле в виде компонент E_φ и dB_z/dt наблюдается также на дневной поверхности. Эта задача рассматривалась в работе [8], но мы получили отличающийся результат, а именно, наличие фронтов с бесконечной амплитудой (для точечного источника при ступенчатом возбуждении).

В соответствии с (3), (5) и (15)

$$E_\varphi = \frac{M_z \mu_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{\infty} J_0(mr) m \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) \times \left\{ \frac{\partial^2 F_0(\tau, 0, m)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F_1(\tau, 0, m)}{\partial z^2} \right\} d\tau dm.$$

Возьмем один интеграл, пользуясь определением функции F и интегралом Зоммерфельда:

$$S_j(t, z) = \int_0^{\infty} J_0(mr) m F_j(t, z, m) dm =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} J_0(mr) m \frac{e^{-n_j z}}{n_j} dm d\omega = \quad (17)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k_j R}}{R} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{R} \frac{\partial F_j(t, R, 0)}{\partial R},$$

где $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, так что, представив

$$E_\varphi = \frac{M_z \mu_0}{2\pi} (A_1 - A_0), \quad (18)$$

получим для A_j :

$$A_j = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) e^{-\gamma_j \tau} \times \quad (19)$$

$$\times \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{1}{R} (I_j^{(1)} u(\tau - T_j) - I_j^{(0)} \delta(\tau - T_j)) \right] \right\}_{z=0},$$

где $I^{(n)}$ – n -ая производная по T функции

$$I_j \equiv I_j^{(0)} = I_0(\gamma_j \sqrt{\tau^2 - T_j^2}),$$

$$T_j = R \sqrt{\mu_0 \epsilon_j}, \quad j = 0, 1,$$

а $\delta(x)$ – функция Дирака.

После дифференцирования и некоторых преобразований, получим:

$$A_j = \frac{\bar{\rho} T_j^2}{\mu_0 r^4} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(\tau) (I_j^{(2)} T_j - I_j^{(1)}) \times \right. \\ \times u(t-\tau) u(\tau - T_j) d\tau + \\ \left. + \varphi_j(T_j) (1 + \gamma_j^2 T_j^2 / 2) u(t - T_j) - \right. \\ \left. - [\varphi'_{\tau=T_j}]_j T_j u(t - T_j) + \varphi(T_j) T_j \delta(t - T_j) \right\}, \quad (20)$$

где теперь $T_j = r \sqrt{\mu_0 \epsilon_j}$, $j = 0, 1$, а

$$\varphi_j(\tau) = -\exp(-\gamma_j \tau) [1 + \gamma_j \tau + \\ + \exp[-2\tilde{\gamma}_j(t-\tau)] (2\tilde{\gamma}_j \tau - \gamma_j \tau - 1)] / \tau^2.$$

Мы получили, таким образом, формулы, пригодные для расчетов. Это общие формулы для произвольных значений сопротивлений и диэлектрических проницаемостей верхнего и нижнего полупространств, если же верхняя среда воздух, то в A_0 следует положить $\gamma_0 = 0$, тогда

$$A_0 = \frac{\bar{\rho} T_0^2}{\mu_0 r^4} \{ \varphi_0(T_0) u(t - T_0) - \\ - \varphi'_{\tau=T_0} T_0 u(t - T_0) + \varphi_0(T_0) T_0 \delta(t - T_0) \}. \quad (21)$$

При численных расчетах на компьютере по формулам (18–21) нужно учитывать, что при $t \rightarrow \infty$ значение интеграла свертки в (20) растет и значения $E_\varphi \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ получаются в результате вычитания больших величин (возможна потеря точности). Полезно рассмотреть (18) при $t = \infty$ и выбросить постоянные.

Получим также выражение для другой практически используемой компоненты — \dot{B}_z :

$$\dot{B}_z = -\frac{1}{r} E_\varphi - \frac{\partial}{\partial r} E_\varphi. \quad (22)$$

Представим

$$\dot{B}_z = \frac{M_z \mu_0}{2\pi} (B_1 - B_0), \quad (23)$$

тогда в общем случае (опуская индекс j)

$$B = \frac{\bar{\rho}}{\mu_0 r^3} \left\{ \int_T^t \varphi(\tau) T^2 (-I^{(1)} + I^{(2)} T - I^{(3)} T^2) d\tau + \right.$$

$$+ \varphi(T) T^2 \frac{(\gamma T)^4}{8} - e^{-\gamma T} \left(9 + 9\gamma T + 9 \frac{(\gamma T)^2}{2} + 3 \frac{(\gamma T)^3}{2} + \right. \\ \left. + \frac{(\gamma T)^4}{2} \right) + e^{-gT} e^{-2\tilde{\gamma}t} \left[9 + 9gT + \left(\frac{1}{2} \gamma^2 + 4g^2 \right) T^2 + \right. \\ \left. + g \left(\frac{1}{2} \gamma^2 + g^2 \right) T^3 + \frac{g^2 \gamma^2 T^4}{2} \right] \},$$

$$g = \gamma - 2\tilde{\gamma},$$

а в случае воздуха ($\gamma = 0$)

$$B_0 = \frac{\bar{\rho}}{\mu_0 r^3} \{ -9 + e^{-2\tilde{\gamma}(t-T_0)} \times \\ \times [9 + 9gT_0 + 4(gT_0)^2 + (gT_0)^3] \}. \quad (25)$$

Заметим, что формулы для производной магнитной индукции приведены при условии $t > T$, в отличие от формул для E_φ , которые можно рассматривать при $-\infty < t < \infty$.

РАСЧЕТЫ. УЧЕТ ФОРМЫ ИМПУЛЬСА И КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ ИСТОЧНИКА

На рис. 2 представлены результаты расчетов, выполненных по формулам (18)–(21). Напоминаем, что поле возбуждается ступенчатым выключением тока в точечном источнике. Это очень существенно здесь. Кривые $E_\varphi(t)$ рассчитаны для точки наблюдения на расстоянии 5 м от источника (ВМД) на поверхности Земли, удельное сопротивление которой 100 Ом м. Шифр кривых — относительное значение диэлектрической проницаемости Земли. Итак, в нулевой момент времени ток в диполе изменяется до 0. Все, что происходит с компонентой E_φ в точке наблюдения в диапазоне времен от 0 до ∞ , двумя особыми точками разбивается на три области. В первой, $0 < t < T_0$, факт выключения источника еще никак не проявляется согласно известному фундаментальному физическому принципу, который мы теперь учли в уравнениях Максвелла. Здесь соответственно $E_\varphi = 0$. При $t = T_0 = 16.678$ наносекунд в точку наблюдения приходит волна по воздуху. В этот момент значение E_φ изменяется от 0 до ∞ и возвращается к конечному значению, зависящему от величины диэлектрической проницаемости Земли и удельного сопротивления. От T_0 начинается вторая стадия, характеризующаяся плавным нарастанием значений поля. Этот процесс зависит от параметров Земли (ρ_1 и ϵ_1), но возбужден волной, прошедшей по воздуху. В момент времени $T_1 = r \sqrt{\mu_0 \epsilon_1}$ приходит волна по Земле и значение E_φ претерпевает мгновенное изменение до $-\infty$ и обратно, до некоторого конечного. Здесь начинает-

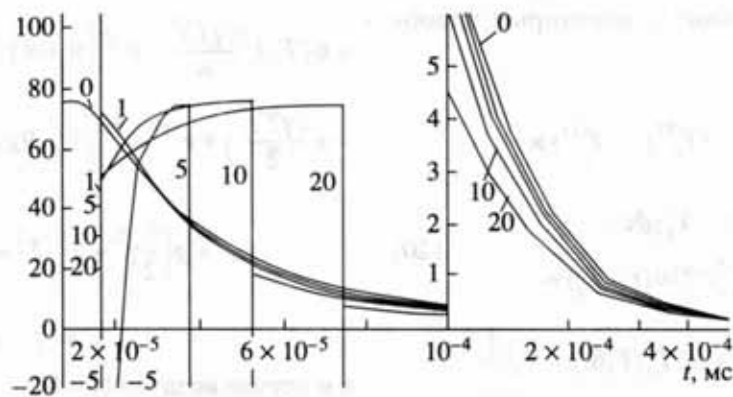


Рис. 2. Кривые становления напряженности (E_ϕ) электрического поля от ступенчатого выключения вертикального магнитного диполя при различных значениях диэлектрической проницаемости Земли. Шифр кривых — ϵ_1/ϵ_0 , $\rho_0 = \infty$ (воздух), $\rho_1 = 100$ Ом м (Земля).

ся третья стадия, где поле плавно спадает, приближаясь к квазистационарному решению. На рис. 3 эта стадия процесса отражена в виде кривых кажущегося сопротивления.

Возникновение мгновенных бесконечных значений наблюдаемого поля связано с применением абстрактного, идеального объекта — точечного источника с мгновенно меняющимся моментом. Реально источник всегда распределен, а момент меняется непрерывно. На рис. 4 приведено сравнение полей (E_ϕ) для ступенчатого и синусоидального выключения тока в источнике. При синусоидальном (плавном) выключении отклик описывается также плавной непрерывной функцией, принимающей только конечные значения.

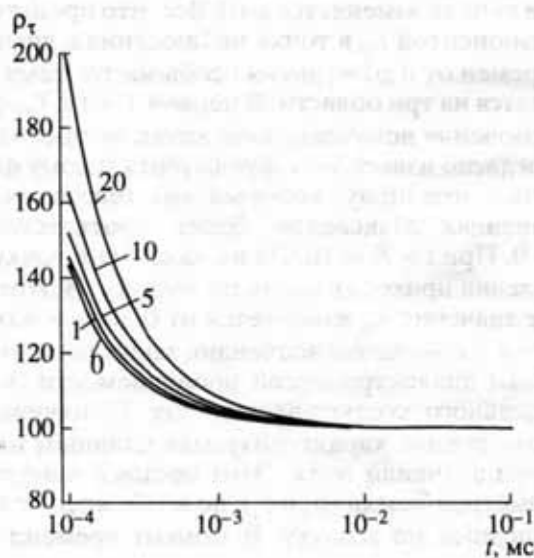


Рис. 3. Кривые кажущегося сопротивления при различных значениях диэлектрической проницаемости. Шифр кривых — ϵ_1/ϵ_0 , $\rho_0 = \infty$, $\rho_1 = 100$ Ом м.

Мы провели расчет отклика при синусоидальном выключении, свертывая функцию отклика от ступеньки с производной от формы импульса тока, и это, кажется, не вызывает каких-либо вопросов в случае сосредоточенного источника. Однако, построить решение для источника конечных размеров (петли), используя решение для точечного, путем простой суперпозиции, как это делается при квазистационарном подходе, нельзя или можно только для поздней стадии процесса. В ранней стадии нужно учитывать процессы распространения тока в проводниках, составляющих источник. Это также относится и к приемному контуру, в котором нужно рассмотреть процесс установления э.д.с.

СРЕДА С ДВУМЯ ГРАНИЦАМИ

Рассмотрим среду с двумя границами. Чтобы немного упростить себе задачу, примем, что параметры верхнего и нижнего полупространств одинаковы (рис. 5). Источник и приемник на первой границе. Тогда для такой двухслойной среды (h — мощность слоя)

$$Z_2(t, 0, m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n_0 + n_1)} \frac{1 - k \exp(-2n_1 h)}{1 - k^2 \exp(-2n_1 h)} \frac{2m}{i\omega} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (26)$$

где

$$k = \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}, \quad n_j^2 = m^2 + k_j^2,$$

$$k_j^2 = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_j - i\omega \mu_0 / \rho_j, \quad j = 0, 1,$$

$$\epsilon_0 = \epsilon_2, \quad \rho_0 = \rho_2.$$

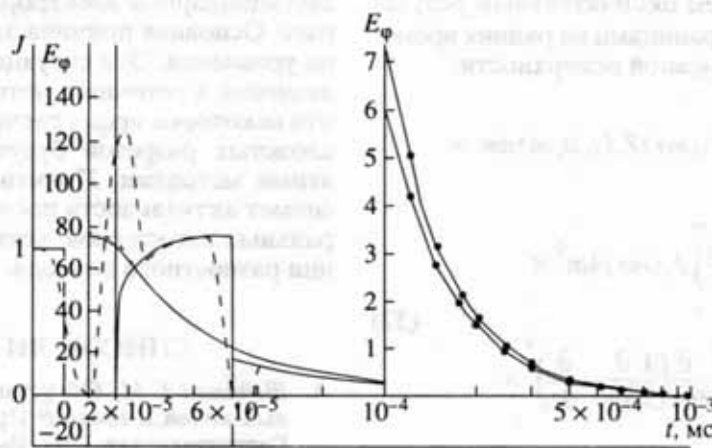


Рис. 4. Процесс установления поля (E_ϕ), возбуждаемого ступенчатым и синусоидальным выключением в сравнении с квазистационарной моделью процесса. $\epsilon_1 = 10\epsilon_0$, $\rho_0 = \infty$, $\rho_1 = 100$ Ом м.

Считая, что $|k^2 \exp(-2n_1 h)| < 1$, представим (26) в виде ряда:

$$Z_2(t, 0, m) = \frac{1}{2\pi} \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(n_0 + n_1)} - \frac{2n_1}{(n_0 + n_1)^2} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-2ln_1 h} k^{2l-1} \right] \times \times \frac{2m}{i\omega} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(n_0 + n_1)} - -2n_1 \sum_{l=1}^{\infty} e^{-2ln_1 h} \frac{(n_0 - n_1)^{4l}}{(k_0^2 - k_1^2)^{2l+1}} \right] \frac{2m}{i\omega} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (27)$$

Первый член нам хорошо знаком, это решение для среды с одной границей. Ко второму применим теорему о свертке:

$$\dot{Z}_2(t, 0, m) = \dot{Z}_a(t, 0, m) + 4m \sum_{l=1}^{\infty} \int g_l(t - \tau) \times \times \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ln_1 h} n_1 (n_0 - n_1)^{4l} e^{-i\omega\tau} d\omega \right\} d\tau, \quad (28)$$

где

$$g_l(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t} d\omega}{(k_0^2 - k_1^2)^{2l+1}} = \frac{1}{(\mu_0 \bar{\epsilon})^{2l+1} \Gamma(4l+2)} \times \times {}_1F_1(2l+1; 4l+2; -2\bar{\gamma}t) u(t), \quad (29)$$

здесь $\bar{\epsilon} = \epsilon_1 - \epsilon_0$, $\bar{\rho} = \rho_0 \rho_1 / (\rho_0 - \rho_1)$, $\bar{\gamma} = 1/(2\bar{\rho} \bar{\epsilon})$, Γ - гамма-функция, ${}_1F_1$ - вырожденная гипергеометрическая функция, которая в данном случае выражается в элементарных функциях. Наконец, пользуясь определенными нами функциями F (19), получим

$$\dot{Z}_2(t, 0, m) = \dot{Z}_a(t, 0, m) + 4m \sum_{l=1}^{\infty} \int g_l(t - \tau) \times \times L_l \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\tau - \tau', 2lh, m) F_0(\tau', z, m) d\tau' \right\}_{z=0} d\tau, \quad (30)$$

где L_l - дифференциальный оператор

$$L_l = \frac{1}{4l^2} \frac{\partial^2}{\partial h^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2l} \frac{\partial}{\partial h} - \frac{\partial}{\partial z} \right)^{4l}.$$

Итак, вместо (26) имеем теперь (30). Вопрос в том, насколько можно анализировать (30) численно. Учитывая вид функций F_j (14) и вид функций g_l (29), легко видеть, что бесконечные пределы в (30) обращаются в конечные. Сходимость ряда зависит от времени наблюдения. На достаточно ранних временах можно обойтись одним членом ряда. Тогда

$$g_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{(k_0^2 - k_1^2)^3} d\omega = = \frac{\bar{\rho}^5 \bar{\epsilon}^3}{4\mu_0^3} [24 + 12a + 2a^2 - e^a (24 - 12a + 2a^2)] u(t), \quad (31)$$

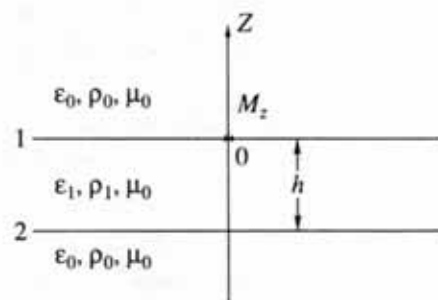


Рис. 5. Модель среды с двумя границами.

здесь $a = -2\gamma t$. Запишем окончательный результат для среды с двумя границами на ранних временах для установки на дневной поверхности:

$$\begin{aligned}
 E_{\varphi}(t) &= -\frac{M_z \mu_0}{4\pi} \int_0^{\infty} J_1(mr) \dot{Z}_z(t, 0, m) dm = \\
 &= E_{\varphi}^0(t) + \frac{M_z \mu_0}{4\pi} \int_0^{\infty} J_1(mr) 4m^2 \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t-\tau) \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial h^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial h} - \frac{\partial}{\partial z} \right)^4 \times \right. \\
 &\left. \times \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\tau-\tau', 2h, m) F_0(\tau', z, m) d\tau' \right\}_{z=0} d\tau dm,
 \end{aligned} \quad (32)$$

$E_{\varphi}^0(t)$ – определенное выше поле для среды с одной границей. Следует заметить, что мы пока не воспользовались бесконечным значением сопротивления верхнего и нижнего полупространств.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные выше примеры построения алгоритма для простейших сред и анализ возможностей построения такого алгоритма для многослойных сред показывают, что задача эта много сложнее, чем аналогичная задача в квазистационарном приближении. Известное представление решения в виде Фурье-трансформации полного частотного решения численно не реализуется без дополнительных сложных трансформаций (как, например, это сделано в [9] для двухслойной среды). Практически, опыт нескольких десятилетий по созданию математического обеспечения ква-

зистационарной электроразведки ЗС мало помогает. Основная причина заключается в смене типа уравнения. Эта ситуация, наверное, менее болезненна в сеточных методах. Следует ожидать, что некоторое время расчеты для горизонтально-слоистых разрезов будут выполняться именно этими методами. Понятно, что это никогда не снимет актуальности построения быстрых интегральных алгоритмов, хотя бы в плане оптимизации разностного подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шейнман С.М. Об установлении электромагнитных полей в земле // Прикладная геофизика. М.: Гостоптехиздат, 1947. Вып. 9. С. 3–55.
2. Дмитриев В.И. Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде // Вычислительные методы и программирование. 1968. Вып. 10. С. 55–65.
3. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991. 303 с.
4. Ваньян Л.Л. Основы электромагнитных зондирований. М.: Недра, 1965. 109 с.
5. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
6. Кауфман А.А., Морозова Г.М. Теоретические основы метода зондирования становлением поля в ближней зоне. Новосибирск: Наука, 1970. 124 с.
7. Губатенко В.П., Назаров А.А. Об асимптотическом поведении поздних стадий становления поля и применимости квазистационарного приближения в одномерной модели несовершенного диэлектрика // Физика Земли. 1994. № 6. С. 50–55.
8. Bhattacharyya B.K. Electromagnetic fields of a transient magnetic dipole on the earth's surface // Geophysics. 1959. V. XXIV. № 1. P. 89–108.
9. Уэйт Дж. Р. Геоэлектромагнетизм. М.: Недра. 1987. 235 с.