

УДК 550.837

© 1992 г. В.С. МОГИЛАТОВ, В.М. ФОМИН

ПЛЕНОЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В МЕТОДАХ МПП И ЗС

Предлагается решение задачи о поле устанавливающегося распределения токов, возбужденных вертикальным магнитным диполем в произвольно-неоднородной проводящей плоскости. При некотором ограничении на амплитуду изменений продольной проводимости плоскости получен конечно-разностный алгоритм, реализованный в быстрой программе. Приводятся результаты тестирования. Обсуждается актуальность и применения программы в методах ЗСБ и МПП.

При интерпретации данных ЗСБ и МПП широко используется горизонтально-однородная слоистая модель геоэлектрического разреза. В случае точечных зондирований это зачастую оправдано даже в условиях явно неоднородного по горизонтали разреза. Однако постановка профильных и площадных работ, объемы которых растут (особенно с закрепленным источником), требует привлечения для интерпретации модельного материала, отражающего влияние латеральных изменений в разрезе. Нам неизвестны, однако, процедуры физического или математического моделирования устанавливающих полей в сложных трехмерных средах, такие, которые можно было бы привлечь к массовой оперативной обработке полевого материала.

Существует и более узкая проблема учета влияния низкоомной неоднородной верхней части разреза (ВЧР), перекрывающей высокоомную толщу, которую можно принять как горизонтально-однородную. Такая ситуация весьма типична для значительной части территории Сибирской платформы, где геоэлектрический разрез может быть сведен к типам *КН*, *НКН* либо *КНКН*. Примером служит разрез Юрубчено-Тахомской зоны, в котором верхний проводящий комплекс залегает на глубинах до 500 м. Его продольная проводимость изменяется от 20 до 60 См. Промежуточная карбонатно-солевая толща имеет суммарную продольную проводимость около 10 См. Объектом электроразведочных работ являются нижнекембрийские и рифейские коллекторы, залегающие на глубине 2–3 км и имеющие проводимость 5–20 См.

При интерпретации результатов зондирований, как площадных, так и точечных, необходимо учитывать, что на поздних участках кривых становления, по которым определяются параметры глубинного объекта, проявляют себя удаленные неоднородности ВЧР. Проблема оказалась настолько актуальной, что вызвала появление специальной методики, описанной в [1], в которой предусматриваются физическое моделирование процесса установления поля неоднородной ВЧР и последующий учет результатов моделирования при обработке полевых измерений. Однако широкому распространению этой методики препятствует трудоемкость технологии физического моделирования, что и стимулировало предлагаемую работу.

Итак, цель данной работы — предложить способ расчета в виде алгоритма и программы устанавливающегося электромагнитного поля, возбуждаемого вертикальным магнитным диполем, момент которого изменяется до нуля (режим выключения). Вторичные токи возбуждаются в горизонтальной проводящей пленке с произвольным распределением продольной проводимости, помещенной на глубину d от дневной поверхности (рис. 1). Имея в виду площадные измерения, следует рассчитать поле (ком-

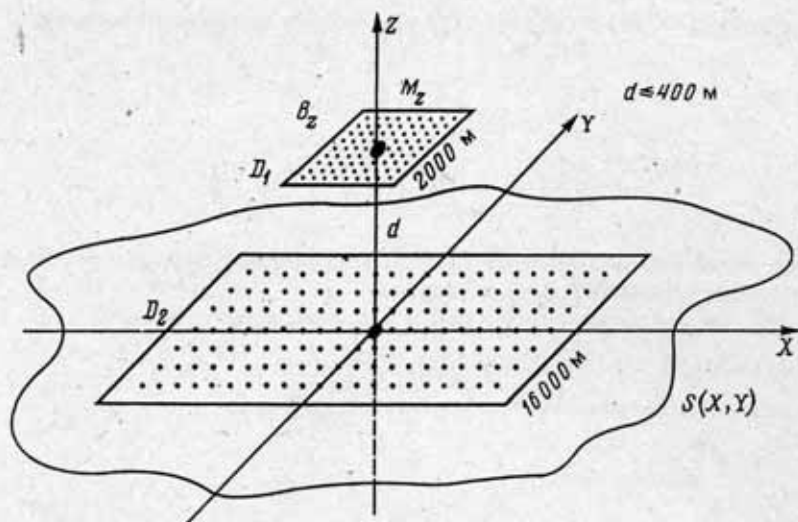


Рис. 1

поненту $\partial B_z / \partial t$) в некоторой области на дневной поверхности D_1 , для чего необходимо задать распределение $S(x, y)$ в гораздо большей области D_2 . Размеры области D_2 определяются размерами D_1 и длительностью времени регистрации процесса.

На первый взгляд задача кажется трехмерной со всеми вытекающими последствиями. Однако нетрудно сообразить, что в каждый момент времени поле определяется мгновенным распределением вторичных токов проводимости в S -плоскости. Таким образом, задача сводится к двумерной задаче определения устанавливающегося распределения токов. Поставим эту задачу, воспользовавшись уравнением Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \cdot \dot{\mathbf{H}}, \quad (1)$$

в котором рассмотрим z -компоненту в плоскости, содержащей проводящую пленку:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \cdot \dot{H}_z, \quad (2)$$

или, введя плотность поверхностного тока,

$$\mathbf{i}(x, y) = S(x, y) \cdot \mathbf{E}(x, y), \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{i_x}{S} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{i_y}{S} \right) = -\mu \cdot \dot{H}_z. \quad (4)$$

По закону Био – Савара, для каждого момента времени

$$H_z = \frac{1}{4\pi} \int_{D'} \frac{[\mathbf{i}(x', y') \cdot \mathbf{r}]_z}{r^3} dD', \quad (5)$$

где $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$, $r_x = (x - x')$, $r_y = (y - y')$, $dD' = dx' dy'$, а интегрирование производится по плоскости XY .

Учтем отсутствие источников (стоков):

$$\text{div } \mathbf{i} = 0, \quad (6)$$

что позволит ввести функцию тока ψ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -i_y, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = i_x, \quad (7)$$

и свести уравнения (4), (5) к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\mu \dot{H}_z = -\nabla \left(\frac{1}{S} \nabla \psi \right), \quad (8)$$

$$H_z = \frac{1}{4\pi} \int_{D'} \frac{\Delta \psi(x', y')}{r} dD'.$$

Последнее уравнение получено из (5) интегрированием по частям с учетом (7) и условия затухания решения вдали от источника.

Систему (8) следует дополнить начальным условием и условиями

$$H_z(x, y), \quad \psi(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t, |x|, |y| \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Поле на дневной поверхности рассчитывается по формуле

$$H_z = \frac{1}{4\pi} \int_{D'} \frac{\Delta \psi(x', y')}{\sqrt{r^2 + d^2}} dD'. \quad (10)$$

Численная реализация задачи (8), (9) весьма затрудняется чрезвычайной изменчивостью решения в пространстве и во времени. Это означает, что необходимо использовать частое разбиение области счета. С другой стороны, мощность доступных вычислительных средств такова, что решение рассматриваемой задачи требует много машинного времени. Однако, имея целью быструю, оперативно используемую программу расчета поля ВЧР, проводимость которой обычно незначительно меняется в области счета, можно радикально уменьшить это время, наложив ограничения на диапазон значений проводимости пленки.

Пусть максимальное отклонение значений проводимости от некоторого среднего значения составляет величину ϵ и невелико. Ниже это требование будет уточнено. Полагаем, что невозмущенное состояние представлено решением $(H_z, \bar{\psi})$ для однородной пленки со значением продольной проводимости, равным среднему значению (\bar{S}) проводимости неоднородной. Тогда из (8), (9) получим задачу для отклонений $\tilde{H}_z, \tilde{\psi}$:

$$-\mu \dot{\tilde{H}}_z = \nabla \left(\frac{1}{S} \nabla \tilde{\psi} \right) + \nabla \left(\frac{1}{S} \nabla \tilde{\psi} \right) - \nabla \left(\frac{1}{\bar{S}} \nabla \tilde{\psi} \right),$$

$$\tilde{H}_z = \frac{1}{4\pi} \int_{D'} \frac{u(x', y')}{r} dD', \quad (11)$$

$$u = \Delta \tilde{\psi},$$

$$\tilde{H}_z, \tilde{\psi}, u \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t, |x|, |y| \rightarrow \infty.$$

Задача (11) математически эквивалентна задаче (8), (9), но при небольших значениях ϵ появляется ряд благоприятных обстоятельств. Это — возможность разрядить сетки и снизить требования к ресурсам ЭВМ, возможность управлять ходом вычислительного процесса на основе известного решения для однородной пленки, наконец, просто разрешается проблема начального условия.

Для аппроксимации временного шага используется схема Эйлера (вперед направленные разности); по пространству применяются центральные разности. Интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода (второе уравнение системы (11)) после записи в конечных разностях преобразуется в систему линейных уравнений относительно неизвестных u_{ij} (i, j — номера точек по координатам x', y'). Для устранения особенности при преобразовании интегрального уравнения следует учесть, что в "буксах", где $r=0$, функция $u(x', y')$ меняется медленнее, чем множитель $1/r$. Следовательно, с

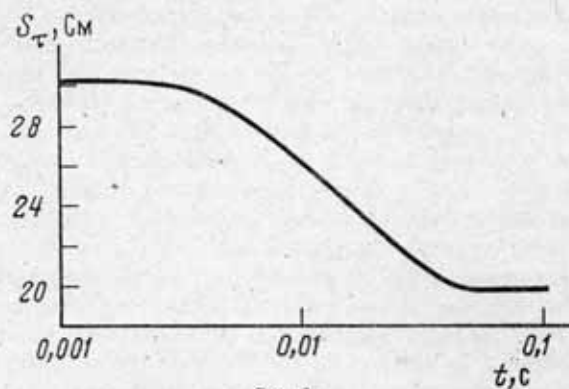


Рис. 2

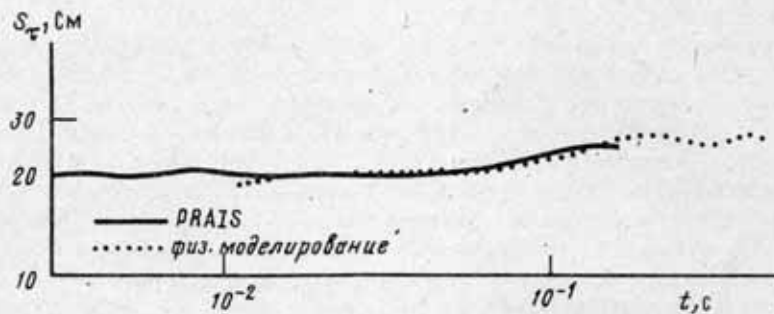


Рис. 3

достаточной точностью справедливо:

$$\int_{y'_j - \frac{h}{2}}^{y'_j + \frac{h}{2}} \int_{x'_i - \frac{h}{2}}^{x'_i + \frac{h}{2}} \frac{u}{r} dx' dy' \approx u_{ij} \int_{y'_j - \frac{h}{2}}^{y'_j + \frac{h}{2}} \int_{x'_i - \frac{h}{2}}^{x'_i + \frac{h}{2}} \frac{1}{r} dx' dy' = u_{ij} J, \quad (12)$$

где h — шаг по пространственным переменным.

Опуская промежуточные вычисления, приведем результат:

$$J = h \left\{ \ln \left[\frac{\text{ch}(\text{arsh } 1) + 1}{\text{ch}(\text{arsh } 1) - 1} \right] + 2 \text{arsh } 1 \right\} = 3,47h. \quad (13)$$

Полученная после преобразования интегрального уравнения система линейных уравнений решается с помощью метода последовательной релаксации [2]. Обращение оператора Лапласа также производится с помощью этого метода.

Блок управления решением обеспечивает выбор пространственного и временного шагов, области счета, выбор момента перехода от одной расчетной сетки к другой. Поскольку мы полагаем, что возмущенное решение не слишком отличается от решения задачи для однородной пленки, последнее служит основой для управления ходом решения задачи.

Вся расчетная область равна $16\,000 \times 16\,000 \text{ м}^2$, если $d \leq 400 \text{ м}$, и $40d \times 40d$, если $d > 400 \text{ м}$. В этой области должно быть определено распределение продольной проводимости — в виде матрицы 201×201 . Для того чтобы экстремумы функций, представляющих решение задачи, не "проваливались" сквозь расчетную сетку и достаточно хорошо описывалось поведение разбегающихся волн на периферии области счета,

предусмотрено использование сеток с увеличивающимся шагом (производится удвоение шага по горизонтали и корректировка временного шага). Число точек по каждой горизонтальной переменной неизменно во все время счета и равно 21. Временной шаг (Δt) при каждой смене сеток определяется как $\Delta t = 0,1 \mu \bar{S}_{xy} h$, где \bar{S}_{xy} — осредненная проводимость, полученная не по всей области счета, а непосредственно по той площади, на которой в данный момент проводится расчет. При таком выборе шага обеспечиваются и счетная устойчивость и необходимая точность решения.

Проведенный цикл экспериментов с тестами показал, что если величина ϵ остается в пределах 25%, то решение отличается от точного (в конце счета) не более чем на 15%. Выход величины ϵ за установленные рамки приводит к появлению в решении отдельных выбросов, не нарушающих общего вида кривой.

Для вычисления значения вертикальной составляющей магнитного поля на дневной поверхности используется сетка 11×11 с шагом 200 м (рис. 1). Заметим, если это необходимо, что употребляемые конкретные геометрические размеры не препятствуют при учете электродинамического подобия применению программы в других масштабных условиях.

При тестировании программы (PRAIS) использовались различные возможности. Естественно, проводились расчеты для однородных пластин, рассматриваемых как неоднородные. Применялись различные качественные тесты. На рис. 2 представлена кривая $S_T(t)$, рассчитанная для соосной установки, размещенной над центром квадратного выступа проводимости ($800 \times 800 \text{ м}^2$, 30 См) в однородной плоскости с продольной проводимостью 20 См. В согласии с нашими представлениями, кривая имеет характерный вид, переходя со значения 30 См в ранней стадии становления на значение 20 См в поздней. Количественное тестирование принципиально новой программы часто затрудняется отсутствием тестового материала. К счастью, нам представились две интересные возможности для такой проверки работы программы PRAIS. В первом случае мы воспользовались расчетами, предоставленными Г.Б. Ицковичем, для осесимметричного распределения продольной проводимости:

$$S(x, y) = \frac{S_0}{1 + \exp[-(x^2 + y^2)/2]} \quad (14)$$

Проводилось сравнение расчетов, выполненных для различных положений источника, для соосной и разнесенной установок. Расхождение не превышало 15%, но большей частью было меньше.

Результаты расчетов по программе PRAIS сравнивались также с результатами физического моделирования, проведенного А.К. Захаркиным. На рис. 3 представлены кривые S_T для совмещенной установки, расположенной над серединой полосы. Соотношение проводимостей полосы и остальной части плоскости — 2 и 3 (в расчетах по программе PRAIS — 20 и 30 См. при физическом моделировании — на сверленном металле — 20 000 и 30 000 См).

Расчетное время программы PRAIS на IBM-PC/AT составляет 20 мин, при этом используется 600 К оперативной памяти. Исходный текст написан на языке Фортран.

Авторы выражают признательность А.К. Захаркину и Г.Б. Ицковичу за предоставление столь необходимого тестового материала.

Список литературы

1. Захаркин А.К., Тарло Н.Н. Физическое моделирование метода ЗСБ // Поиск полезных ископаемых в Сибири методом зондирования становлением поля (Сб. науч. тр. СНИИГГиМС). Новосибирск, 1988. С. 30–44.
2. Young D.M. A bound for the optimum relaxation factor for the successive over-relaxation method // Numer. Math, 1971. V. 16. № 5. P. 83–90.

Поступила в редакцию
22.04.91