

В. С. МОГИЛАТОВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ НАЗЕМНО-СКВАЖИННОЙ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ

Рассмотрены прямые задачи наземно-скважинной нефтяной электроразведки. Рассчитаны поля от различных погруженных в двухслойный разрез источников в присутствии проводящего или непроводящего тонких дисков. Даются рекомендации для определения положения края диска по наблюдаемому на дневной поверхности полю.

Размещение различных элементов приемно-питающей электроразведочной установки в скважине для изучения геологического разреза приобретает все большее значение в связи с развитием сети скважин, а также потому, что это открывает новые возможности в повышении разрешающей способности разведки. Так, в работе [1] выявлены совершенно необычные для наземного источника особенности неустановившегося поля погруженного вертикального диполя (ВЭД), в частности экспоненциальный характер спада (в средах с изолирующим основанием), что влечет за собой уникальную чувствительность к малым изменениям параметров разреза. Естественно ожидать, что приближение элементов установки к интересующей части разреза повышает ее вклад в наблюдаемое поле и уменьшает влияние поверхностных неоднородностей.

Первостепенной задачей в структурной наземно-скважинной электроразведке, когда скважина сама по себе дает информацию о разрезе вблизи нее, является прослеживание горизонтов для определения, например, края залежи или коллектора.

В этой статье приводится теоретический анализ ситуации, когда в двухслойный разрез с непроводящим основанием включен тонкий горизонтальный пласт с переменной продольной проводимостью (низкоомный объект) или с переменным поперечным сопротивлением (высокоомный объект). В случае использования различных погруженных источников постоянного тока (один электрод, ВЭД, вертикальная линия) проверяется возможность определения границ простирающегося пласта по наблюдаемому на дневной поверхности полю.

Модель и постановка задачи. Для расчетов использовалась осесимметричная геоэлектрическая модель, показанная на рис. 1. В цилиндрической системе координат с осью z , направленной вверх, положение дневной поверхности определяется величиной $z = h_1$, опорного горизонта — $z = -h_2$, плоскости S (или T) — $z = 0$. Значение продольной проводимости (или поперечного сопротивления) зависит только от r .

В качестве источника постоянного тока возьмем один заземленный ($z = z_0$) электрод (второй отнесен на бесконечность). Решение для вертикального электрического диполя или вертикальной линии легко получить, воспользовавшись решением для одного электрода.

В силу симметрии задачи отличны от нуля компоненты E_r , E_z и H_ϕ . Введем потенциалы:

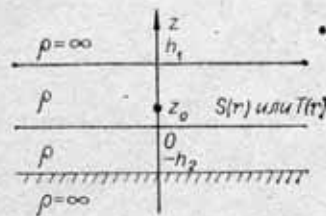


Рис. 1. Модель и система координат.

$$H = \text{rot } A, \quad (1)$$

$$E = \text{grad } \varphi, \quad (2)$$

$$\varphi = \rho \text{ div } A, \quad (3)$$

Вектор-потенциал имеет лишь одну компоненту A_z , так что

$$H_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad (4)$$

$$E_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}; E_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (5)$$

Скалярный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа, условию $\varphi \rightarrow 1/\sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}$ при $z \rightarrow z_0, r \rightarrow 0$ и условию $\partial \varphi / \partial z = 0$ при $z = h_1, -h_2$. Потребуем выполнения достаточных условий [3] для T -плоскости:

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)_1 - \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)_2 = \frac{1}{\rho} T \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}, \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)_1 = \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)_2 \quad (6)$$

и на S -плоскости:

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)_1 - \left(\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)_2 = S \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_2. \quad (7)$$

Ищем решение для потенциалов в виде

$$A_z = \frac{I}{4\pi} \int_0^\infty J_0(mr) Z(m, z) dm, \quad (8)$$

$$\varphi = \frac{I\rho}{4\pi} \int_0^\infty J_0(mr) F(m, z) dm, \quad (9)$$

где I — ток источника, J_0 — функция Бесселя, а функции Z и F удовлетворяют уравнениям

$$Z_z'' - m^2 Z = 0, \quad (10)$$

$$F_z'' - m^2 F = 0,$$

причем

$$F = Z_z'. \quad (11)$$

Поскольку нас интересуют компоненты E_r и E_z (H_φ на дневной поверхности равно нулю в любой осесимметричной модели), то задача сводится к отысканию функции F .

Двухслойная задача. Рассмотрим вначале решение в случае отсутствия в плоскости $z=0$ продольной проводимости или поперечного сопротивления. Полученное решение назовем нормальным. Для функции F_n имеем краевую задачу:

$$\begin{cases} F_n'' - m^2 F_n = 0, & -h_2 \leq z \leq h_1, \\ \frac{\partial F_n(h_1)}{\partial z} = \frac{\partial F_n(-h_2)}{\partial z} = 0, \\ [F_n]_{z=z_0} = 0, \left[\frac{\partial F_n}{\partial z}\right]_{z=z_0} = -2m. \end{cases} \quad (12)$$

Решение получаем в виде:

$$F_n = 2 \frac{\text{ch}[m(h_1 - z)] \cdot \text{ch}[m(h_2 + z_0)]}{\text{sh}[m(h_1 + h_2)]}, \text{ при } z \geq z_0, \quad (13)$$

$$F_n = 2 \frac{\text{ch}[m(h_2 + z)] \cdot \text{ch}[m(h_1 - z_0)]}{\text{sh}[m(h_1 + h_2)]}, \text{ при } z \leq z_0. \quad (14)$$

Поле плоскости с постоянной продольной проводимостью ($S(r) \equiv \text{const}$). Нетрудно показать, что в этом случае условие на плоскости для функции F есть

$$[F]|_{z=0} = 0, \left[\frac{\partial F}{\partial z} \right]_{z=0} = \rho S m^2 F. \quad (15)$$

Представим функцию F как

$$F = F_n + F_a, \quad (16)$$

где F_a — аномальная часть, определяемая наличием проводящей плоскости. Для F_a получаем краевую задачу:

$$\begin{cases} F_a'' - m^2 F_a = 0, & -h_2 \leq z \leq h_1; \\ \frac{\partial F_a}{\partial z}(h_1) = \frac{\partial F_a}{\partial z}(-h_2) = 0, \\ [F_a]|_{z=0} = \left[\frac{\partial F_a}{\partial z} \right]_{z=0} = \rho m^2 S [F_a(0) + F_n(0)]. \end{cases} \quad (17)$$

Имеем следующее решение

$$F_a = -\rho S m \cdot F_n(0) \frac{\operatorname{ch}[m(h_1 - z)] \operatorname{ch}(mh_2)}{\operatorname{sh}[m(h_1 + h_2)] + \rho S m \operatorname{ch}(mh_1) \operatorname{ch}(mh_2)}, \quad (18)$$

где $z \geq 0$.

Поле плоскости с постоянным поперечным сопротивлением ($T(r) = \text{const}$). В этом случае условие на плоскости для функции F есть

$$[F]|_{z=0} = \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial F}{\partial z}, \left[\frac{\partial F}{\partial z} \right]_{z=0} = 0. \quad (19)$$

Для аномальной части функции F получаем краевую задачу:

$$\begin{cases} F_a'' - m^2 F_a = 0, & -h_2 \leq z \leq h_1, \\ \frac{\partial F_a}{\partial z}(h_1) = \frac{\partial F_a}{\partial z}(-h_2) = 0, \\ [F_a]|_{z=0} = \frac{T}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial F_a}{\partial z}(0) + \frac{\partial F_n}{\partial z}(0) \right), \left[\frac{\partial F_a}{\partial z} \right]_{z=0} = 0, \end{cases} \quad (20)$$

которая имеет следующее решение:

$$F_a = \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial F_n}{\partial z}(0) \cdot \frac{\operatorname{ch}[m(h_1 - z)] \operatorname{sh}(mh_2)}{\operatorname{sh}[m(h_1 + h_2)] + T/\rho \cdot m \cdot \operatorname{sh}(mh_1) \operatorname{sh}(mh_2)}, \quad (21)$$

где $z \geq 0$.

Поле плоскости с переменной продольной проводимостью ($S = S(r)$). Получим условие для функции F в том случае, когда продольная проводимость есть некоторая функция координаты r . При $z = 0$

$$\left[\frac{\partial A_z}{\partial r} \right]_{z=0} = S(r) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (22)$$

или, учитывая (9),

$$\int_0^{\infty} J_1(mr) m (Z_1 - Z_2) dm = S(r) \cdot \rho \int_0^{\infty} J_1(mr) m F dm. \quad (23)$$

Далее, наложим на функцию $S(r)$ условие $S(r) = 0$, если $r > R$, где R имеет произвольно большое значение. Совершая преобразование Бесселя выражения (23) и меняя порядок интегрирования в правой части с учетом $Z = Z_z/m^2 = F'_z/m^2$, получим, что при $z = 0$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial z} \right]_{z=0} = m^2 \rho \int_0^{\infty} F m' \left\{ \int_0^{\infty} J_1(mr) J_1(m'r) r S(r) dr \right\} dm'. \quad (24)$$

Таким образом, условием для функции F при $z = 0$ является удовлетворение интегрального уравнения (24). Для конкретных расчетов следует задаться зависимостью $S(r)$. Рассмотрим наиболее простой и ин-

интересный случай, когда $S(r) = S_0$ при $r \leq R$ и $S(r) = 0$ при $r > R$, т. е. имеется в виду проводящий диск радиуса R . Интеграл в фигурных скобках легко вычисляется, и мы имеем для аномального поля диска следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} F_a'' - m^2 F_a = 0, & -h_2 \leq z \leq h_1, \\ \frac{\partial F_a}{\partial z}(h_1) = \frac{\partial F_a}{\partial z}(-h_2) = 0, \\ [F_a]_{z=0} = 0, \\ \left[\frac{\partial F_a}{\partial z} \right]_{z=0} = \rho S_0 R m^2 \int_0^\infty m' F_a(0) \Psi_s(m, m') \cdot dm' + \rho S_0 R m^2 \int_0^\infty m' F_n(0) \Psi_s(m, m') \times \\ \times dm', \end{cases} \quad (25)$$

где

$$\Psi_s = \frac{m' J_1(mR) \cdot J_0(m'R) - m J_0(mR) \cdot J_1(m'R)}{m^2 - m'^2}. \quad (26)$$

Решение представляется в виде

$$F_a(z) = F_a(0) \frac{\text{ch}[m(h_1 - z)]}{\text{ch}(mh_1)}, \quad (27)$$

где $z \geq 0$, а функция $F_a(0)$ является решением интегрального уравнения

$$\begin{aligned} F_a(0) = -m \frac{\text{ch}(mh_1) \text{ch}(mh_2)}{\text{sh}[m(h_1 + h_2)]} \cdot \left\{ \rho S_0 R \int_0^\infty \Psi_s m' F_a(0) \cdot dm' + \right. \\ \left. + \rho S_0 \cdot R \cdot \int_0^\infty \Psi_s \cdot m' \cdot F_n(0) \cdot dm' \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Поле плоскости с переменным поперечным сопротивлением ($T \equiv T(r)$). Аналогично, пользуясь условием (8) для T -плоскости, получаем решение для диска радиуса R с поперечным сопротивлением T_0 :

$$F_a(z) = - \frac{\partial F_a(0)}{\partial z} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{\text{ch}[m(h_1 - z)]}{\text{sh}(mh_1)}, \quad (29)$$

где $z \geq 0$, а функция $\partial/\partial z F_a(0)$ — решение интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} F_a(0) = -m^2 \frac{\text{sh}(mh_1) \text{sh}(mh_2)}{\text{sh}[m(h_1 + h_2)]} \left\{ \frac{T_0 R}{\rho} \cdot \int_0^\infty \Psi_T \frac{\partial F_a(0)}{\partial z} dm' + \right. \\ \left. + \frac{T_0 R}{\rho} \cdot \int_0^\infty \Psi_T \frac{\partial F_n(0)}{\partial z} \cdot dm' \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\Psi_T = \frac{m \cdot J_1(mR) \cdot J_0(m'R) - m' \cdot J_1(m'R) \cdot J_0(mR)}{m^2 - m'^2}.$$

Расчет поля на ЭВМ. Таким образом, алгоритм расчета поля в присутствии, например, проводящего диска сводится к решению интегрального уравнения (28), в результате чего мы получаем F_a при $z=0$ как функцию от переменной m . По формуле (27) пересчитываем значения функции $F_a(0)$ для произвольных значений z . Наконец, интеграл (9) дает значения потенциала. Алгоритм реализован на БЭСМ-6, в программе предусмотрено девять режимов работы (три типа источника — электрод, диполь, линия на оси z и три типа приемника — электрод, диполь, линия на дневной поверхности). В результате работы программы выдаются кривые по профилю измеряемых величин, а кроме того, различные вспо-

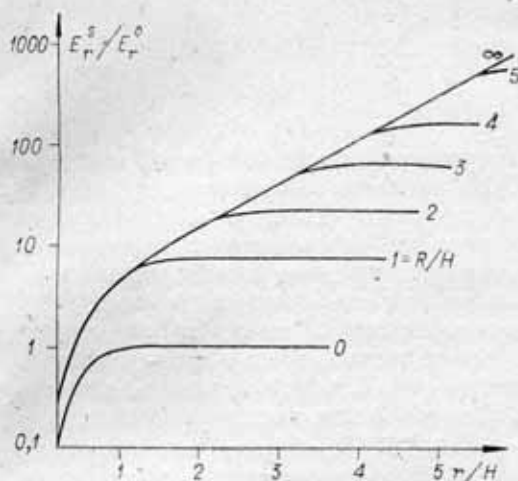


Рис. 2. Нормированные кривые поля.

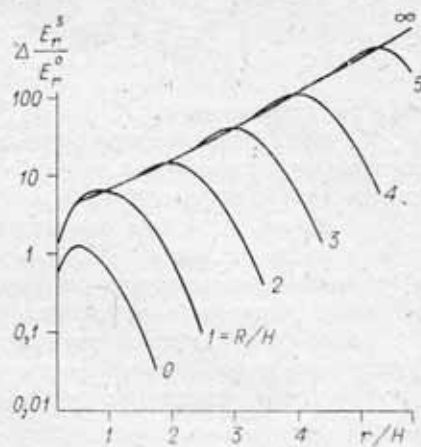


Рис. 3. Дифференциальные нормированные кривые поля.

могательные кривые, назначение которых — подчеркнуть положение края диска. Результат работы программы удовлетворяет различным качественным требованиям (например, увеличение радиуса диска приводит к совпадению полей диска и плоскости вблизи начала координат). Известно [2] простое аналитическое решение для идеально проводящего диска, помещенного в проводящее пространство. Расчет, проведенный для такой модели (точнее, при $h_1, h_2 \gg z, z_0, r$ и $S_0 \gg z \cdot 1/\rho$), дал совпадение по аномальному полю не хуже 5%.

Определение положения края диска по измеряемым на дневной поверхности величинам. Подробное обоснование и выбор приемно-питающей установки, схемы измерений и методики определения края по наблюдаемой кривой будут изложены в другой статье. Здесь приведем общие соображения. Сразу следует заметить, что определение края непосредственно по кривой потенциала (длинная приемная линия) или по кривой градиента (короткая приемная линия) для практически важных небольших значений T или S невозможно, особенно это касается точечного источника. Таким образом, необходима трансформация наблюдаемой кривой, которая подчеркнула бы местоположение края диска. При выборе такой трансформации естественно исходить из того, что закономерности изменения поля по разному в области над краем диска существенно изменяются в сравнении с горизонтально-слоистыми участками разреза. Нормирование наблюдаемого поля на поле соответствующей горизонтально-слоистой среды позволяет подчеркнуть положение края объекта. Дифференцирование по разному нормированной кривой дает гораздо больший эффект.

Пользуясь расчетами по приведенному алгоритму, рассмотрим для примера следующую модель: двухслойный разрез с изолирующим основанием мощностью H и удельным сопротивлением ρ содержит на глубине $h_1 = 0,8H$ диск с поперечным сопротивлением $T = T_0$ (где $T_0 = H \cdot \rho$). Расчеты показали, что для таких значений T (и меньших) одиночный точечный источник не позволяет выделить край — слишком мало аномальное поле на фоне нормального. В качестве источника используем вертикальную линию, заземленную над и под диском ($0,7H$ и $0,9H$).

На рис. 2 представлены нормированные кривые (по профилю от оси диска) полного поля на дневной поверхности для различных величин радиуса диска (шифр кривых — относительный радиус диска). Характер кривых определяется нормирующей функцией. В данном случае использовано асимптотическое ($r > H$) выражение для поля вертикальной линии или вертикального диполя в двухслойной среде с изолирующим

основанием [1]:

$$E_r^0 = a \cdot e^{-\frac{\pi \cdot r}{H}} \sqrt{\frac{H}{2r}}, \quad (31)$$

где a не зависит от r .

На рис. 2 видно, что кривая нормального поля (шифр 0) выходит на постоянное значение при $r > H$. На постоянное значение выходят и кривые поля двухслойной среды, содержащей диск, т. е. аномальное поле T -диска за краем спадает по тому же закону, что и нормальное поле, в соответствии с (31). Это объясняется тем, что T -диск можно рассматривать как совокупность вертикальных электрических диполей.

Что касается определения положения края диска, то он лежит в районе выхода кривой на постоянное значение, вблизи отхода кривой T -диска от кривой T -плоскости (шифр $-\infty$). Следует признать, что это довольно неопределенные признаки. На рис. 3 представлены соответствующие дифференциальные кривые, т. е. $\Delta_r(E_r^1/E_r^0)$ (практически это реализуется приемной установкой типа MON), на которых положение края четко фиксируется максимумом. Описанной методикой на теоретических кривых обнаруживаются края объектов с поперечным сопротивлением $T < 0,05 T_0$.

Таким образом, решение описанных выше прямых задач наземно-скважинной электроразведки позволяет говорить о принципиальной возможности определения края залежи или водонасыщенного коллектора. При выборе питающей установки, приемника и методики определения края по наблюдаемой кривой следует тщательно учитывать особенности разреза.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Гольдман, В. С. Могилатов. Становление поля вертикального электрического диполя, погруженного в горизонтально-слоистое полупространство.— В кн.: Теория и опыт применения электромагнитных полей в разведочной геофизике. Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1978.
2. В. М. Сапожников. Возмущение электрического поля точечного источника проводящим плоским округлым диском.— В кн.: Вопросы рудной геофизики. Свердловск: Горный ин-т, 1973.
3. С. М. Шейман. Об установлении электромагнитных полей в земле.— В кн.: Прикладная геофизика. Вып. 3. М.: Гостехиздат, 1947.

СНИИГГуМС
Новосибирск

Поступила в редакцию
16 апреля 1982 г.

V. S. Mogilatov

MATHEMATICAL MODELLING OF THE PROBLEMS OF ELECTRICAL PROSPECTING ON THE SURFACE AND IN THE WELLS

The article discusses direct problems of electrical prospecting for oil as carried out on the surface and in the wells. The calculations were done for electromagnetic fields offered by various sources to be plunged into two-layer section with the presence of conductive or non-conductive thin disks. There are suggested some recommendations how to determine the position of the disk edge by electromagnetic field as observed on the day surface.