

Министерство образования и науки Республики Казахстан
Национальная инженерная академия Республики Казахстан
Павлодарский государственный университет им. Торайгырова
Казахстанский национальный университет им. аль-Фараби
НИИ математики и механики КазНУ
Институт вычислительных технологий СО РАН
Технопарк «Новосибирск»
Новосибирский государственный университет
Новосибирский государственный технический университет

ТРУДЫ
международной конференции
«Вычислительные и информационные
технологии в науке, технике и образовании»

II том

20-22 сентября 2006 г.
г. Павлодар

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В МОРСКОЙ ВОДЕ

А.В. Мариненко, М.И. Эпов, Э.П. Шурина

Новосибирск (Институт нефтегазовой геологии и геофизики
им. А.А. Трофимука)

Введение

Для морской геофизики характерна зависимость коэффициента электропроводности от глубины. Ярким примером наличия такой зависимости может служить Черное море. В Черном море, из-за его опреснения реками, существует две массы, два слоя воды, которые слабо смешиваются друг с другом [1]. Поверхностный слой черноморской воды – до глубины примерно 100 метров – преимущественно речного происхождения. В то же время, в глубины моря поступает более соленая (а значит – и более тяжелая) вода из Мраморного моря – она протекает по дну Босфорского пролива (нижнебосфорское течение) и опускается вглубь. Поэтому соленость придонных слоев черноморской воды достигает 30‰ (‰ – промилле, грамм соли в литре воды). Изменение свойств воды с глубиной – не плавное: с поверхности до 50–100 метров соленость меняется быстро – от 17 до 21 ‰, а уже далее – до дна – увеличивается равномерно. В соответствии с соленостью изменяется и коэффициент электропроводности воды. В работе рассматриваются вычислительные схемы на базе векторного метода конечных элементов для гармонического по времени электрического поля с различными реализациями зависимости коэффициента электропроводности от глубины. Предложена вычислительная схема для учета сколь угодно сложной зависимости коэффициента электропроводности от глубины, выраженной в виде функции $\sigma(z)$. Данный подход также может быть использован для учета функциональной зависимости любой другой характеристики среды. Выполнена серия вычислительных экспериментов для различных свойств морской воды, подводного грунта и различных частот.

Математическая модель

Система уравнений Максвелла, описывающих процессы электромагнетизма, имеет вид [2]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma(z) \vec{E} + \vec{I}^{st}; \\ \operatorname{div}(\mu \vec{H}) = 0; \quad \operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = 0; \end{cases} \quad (1)$$

со следующими обозначениями:

\vec{E} – напряженность электрического поля (В/м), которая является количественной силовой характеристикой действия электрического поля на заряженные частицы и тела;

\vec{H} – напряжённость магнитного поля (А/м);

\vec{I}^{st} – сторонний ток (А), вызванный приложенным извне напряжением;

ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, характеризующая ее электрические свойства;

μ – абсолютная магнитная проницаемость среды, характеризующая ее магнитные свойства;

$\sigma(z)$ – удельная электрическая проводимость (удельная электропроводность), в общем случае зависящая от глубины z .

Система уравнений Максвелла выражает связь между электрическим и магнитным полем. Чтобы решать задачи относительно одного поля (электрического или магнитного) переходят к уравнениям второго порядка.

Перейдем к уравнению второго порядка для вектора напряженности электрического поля \vec{E} :

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}; \quad (2)$$

Из второго уравнения системы (1) $\text{rot } \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma(z) \vec{E} + \vec{I}^{st}$, следовательно:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma(z) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \frac{\partial \vec{I}^{st}}{\partial t}; \quad (3)$$

Представим компоненты \vec{I}^{st} и \vec{E} полученного уравнения в следующем виде:

$$\vec{I}^{st} = \text{Re}(\vec{I}_{st}^{real} + \vec{I}_{st}^{im}) e^{i\omega t} = \vec{I}_{st}^{real} e^{i\omega t}; \quad (4)$$

$$\vec{E} = \vec{E} e^{i\omega t} = (\vec{E}^{real} + i\vec{E}^{im}) e^{i\omega t};$$

где i – мнимая единица, $i^2 = -1$. (В соответствии с формулой Эйлера $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$, множитель $e^{i\omega t}$ определяет гармонический характер изменения поля \vec{E} во времени с частотой ω .)

Найдем первую и вторую производные от \vec{E} :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E} e^{i\omega t}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E} e^{i\omega t};$$

Подставив эти соотношения в уравнение (3), получим:

$$e^{i\omega t} \text{rot rot } \vec{E} = \mu \omega^2 \varepsilon \vec{E} e^{i\omega t} - i\mu \omega \sigma(z) \vec{E} e^{i\omega t} - i\mu \omega \vec{I}_{st}^{real} e^{i\omega t}; \quad (6)$$

Исключим из полученного уравнения $e^{i\omega t}$:

$$\text{rot rot } \vec{E} = \mu \omega^2 \varepsilon \vec{E} - i\mu \omega \sigma(z) \vec{E} - i\mu \omega \vec{I}_{st}^{real}; \quad (7)$$

Таким образом, поведение гармонического по времени электрического поля описывается векторным уравнением Гельмгольца:

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{E} + k^2 \vec{E} = -i\omega \vec{I}_{st}^{reel}, \quad (8)$$

где $k^2 = i\omega\sigma(z) - \omega^2\varepsilon$ – волновое число.

В случае, когда σ – константа, закон сохранения электрического заряда (алгебраическая сумма электрических зарядов тел или частиц, образующих электрически изолированную систему, не изменяется при любых процессах, происходящих в этой системе) описывается следующим уравнением:

$$\operatorname{div}((\sigma + i\omega\varepsilon)\vec{E}) = 0; \quad (9)$$

Или в развернутом виде:

$$\sigma \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + i\omega\varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = 0; \quad (10)$$

Однако если имеет место зависимость $\sigma(z)$, то уравнение, описывающее закон сохранения электрического заряда, выглядит иначе:

$$\frac{\partial \sigma(z)}{\partial z} E_z + \sigma(z) \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + i\omega\varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = 0; \quad (11)$$

Пусть

$$\operatorname{div}(\vec{I}_{st}^{reel}) = 0; \quad (12)$$

Рассмотрим условия согласования на контактных границах. Пусть исходная область Ω состоит из подобластей, в каждой из которых заданы свои значения параметров ε , μ и σ . Для границы Γ , разделяющей подобласти Ω_1 и Ω_2 , математическая формализация физических условий сопряжения векторных полей имеет следующий вид:

$$[n \times \vec{E}]_{\Gamma} = 0; \quad (13)$$

$$[n \cdot (\sigma + i\omega\varepsilon)\vec{E}]_{\Gamma} = 0; \quad (14)$$

На границе области зададим однородные краевые условия:

$$n \times \vec{E}|_{\partial\Omega} = 0; \quad (15)$$

Вариационная формулировка

Пусть Ω – трехмерная, в общем случае неоднородная по физическим свойствам область с Липшиц-непрерывной границей $\partial\Omega$. Введем гильбертово пространство векторных функций интегрируемых с квадратом по Лебегу в области Ω :

$$\mathbb{H}(\Omega) = \{ \vec{v} \mid \vec{v} \in L_2(\Omega) \}; \quad (16)$$

В 1980 году Ж. Неделек ввел в рассмотрение пространство векторных функций:

$$\mathbb{H}(rot; \Omega) = \{ \vec{v} \mid \vec{v} \in \mathbb{H}(\Omega), \operatorname{rot} \vec{v} \in \mathbb{H}(\Omega) \} \subset \mathbb{H}(\Omega); \quad (17)$$

$$\mathbb{H}_0(rot; \Omega) = \{ \vec{v} \mid \vec{v} \in \mathbb{H}(rot; \Omega), \vec{n} \times \vec{v} = 0 \}; \quad (18)$$

Введем скалярное произведение:

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} d\Omega; \quad (19)$$

Вариационная постановка в форме Галеркина для уравнения, описывающего поведение электрического поля, имеет вид:

$$\forall \vec{E}^* \in \mathbb{H}_0(\text{rot}; \Omega): \left(\text{rot} \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \sigma(z) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{I}_{st}^{real}}{\partial t}, \vec{E}^* \right) = 0; \quad (20)$$

$$\left(\text{rot} \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{E}, \vec{E}^* \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon \vec{E}, \vec{E}^*) + \frac{\partial}{\partial t} (\sigma(z) \vec{E}, \vec{E}^*) = - \left(\frac{\partial \vec{I}_{st}^{real}}{\partial t}, \vec{E}^* \right); \quad (21)$$

На основании первой векторной теоремы Грина:

$$\int_{\Omega} \vec{u} \cdot \text{rot} \text{rot} \vec{v} d\Omega = \int_{\Omega} \text{rot} \vec{u} \cdot \text{rot} \vec{v} d\Omega - \int_{\partial\Omega} p [(\vec{u} \times \text{rot} \vec{v}) \cdot \vec{n}] dS; \quad (22)$$

$$\left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{E}, \text{rot} \vec{E}^* \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon \vec{E}, \vec{E}^*) + \frac{\partial}{\partial t} (\sigma(z) \vec{E}, \vec{E}^*) -$$

$$- \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu} [(\vec{E}^* \times \text{rot} \vec{E}) \cdot \vec{n}] dS = - \left(\frac{\partial \vec{I}_{st}^{real}}{\partial t}, \vec{E}^* \right); \quad (23)$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu} [(\vec{E}^* \times \text{rot} \vec{E}) \cdot \vec{n}] dS = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu} [\vec{n} \times \vec{E}^*] \cdot \text{rot} \vec{E} dS = 0; \quad (24)$$

Последнее равенство истинно в силу того, что $\vec{E}^* \in \mathbb{H}_0(\text{rot}; \Omega)$.

Окончательно вариационная задача имеет вид:

$$\left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{E}, \text{rot} \vec{E}^* \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon \vec{E}, \vec{E}^*) + \frac{\partial}{\partial t} (\sigma(z) \vec{E}, \vec{E}^*) = - \left(\frac{\partial \vec{I}_{st}^{real}}{\partial t}, \vec{E}^* \right); \quad (25)$$

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Для построения дискретного аналога вариационной задачи будем аппроксимировать элементы пространства $\mathbb{H}(\text{rot}; \Omega)$ элементами дискретного подпространства $\mathbb{H}^h(\text{rot}; \Omega)$. Тогда дискретный аналог вариационной задачи (25) имеет вид:

$$\left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{E}_h^{real}, \text{rot} \vec{E}_h^{1*} \right)_{\Omega} - (\omega^2 \varepsilon \vec{E}_h^{real}, \vec{E}_h^{1*})_{\Omega} - (\omega \sigma(z) \vec{E}_h^{im}, \vec{E}_h^{1*})_{\Omega} = 0; \quad (26)$$

$$\left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{E}_h^{im}, \text{rot} \vec{E}_h^{2*} \right)_{\Omega} - (\omega^2 \varepsilon \vec{E}_h^{im}, \vec{E}_h^{2*})_{\Omega} +$$

$$+ (\omega \sigma(z) \vec{E}_h^{re}, \vec{E}_h^{2*})_{\Omega} = (\omega \vec{I}_{st}^{real}, \vec{E}_h^{2*})_{\Omega}; \quad (27)$$

Раскладывая действительную и мнимую компоненты поля \vec{E}_h по базису дискретного подпространства $\mathbb{H}_0^h(\text{rot}; \Omega)$, и выбирая в качестве функций \vec{E}^{1*}

и \vec{E}^{2*} базисные функции \vec{N}_m , перейдем от дискретного аналога вариационной задачи к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений, имеющей блочную структуру:

$$\begin{pmatrix} A+M & -M1 \\ M1 & A+M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где α и β – веса в разложении по базису действительной и мнимой компонент поля \vec{E}_h , соответственно, а элементы матриц A , M , $M1$ и вектора правой части F вычисляются через интегралы:

$$A_{ij} = \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \text{rot} \vec{N}_j \cdot \text{rot} \vec{N}_i d\Omega; \quad (29)$$

$$M_{ij} = -\omega^2 \varepsilon \int_{\Omega} \vec{N}_j \cdot \vec{N}_i d\Omega; \quad (30)$$

$$M1_{ij} = \omega \int_{\Omega} \sigma(z) \vec{N}_j \cdot \vec{N}_i d\Omega; \quad (31)$$

$$F_i = \omega \int_{\Omega} \vec{N}_i \cdot \vec{I}_m^{real} d\Omega; \quad (32)$$

При написании формул (29)-(32) считаем, что μ , ε и ω являются константами. Заметим, что в случае наличия зависимости коэффициента электропроводности от глубины, мы не можем выносить за знак интеграла (31) функцию $\sigma(z)$.

Для решения несимметричной системы линейных алгебраических уравнений (28) использовался метод обобщенных минимальных невязок (GMRES), который был предложен в 1986 году И. Саадом и М. Шульцем [3]. Современное описание данного метода приведено во многих научных изданиях, например, в работе [4].

Локальные векторные базисные функции

Построим в расчетной области гексаэдральную сетку [5], на ячейках которой определим базисные edge-функции, ассоциированные с ребрами сетки конечномерного подпространства $\mathbb{H}^h(\text{rot}; \Omega) \subset \mathbb{H}(\text{rot}; \Omega)$. Выбор гексаэдров в качестве конечных элементов обусловлен тем, что на начальном этапе решения поставленной задачи (исследование влияния зависимости коэффициента электропроводности от глубины на результат) отсутствует необходимость в построении сложных по форме областей.

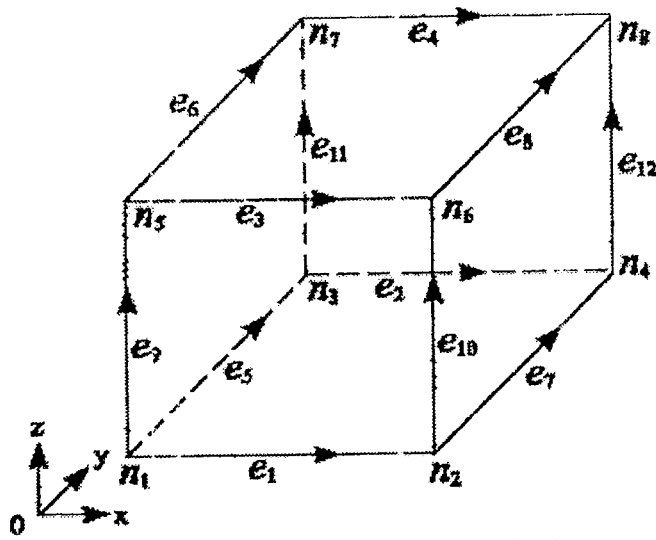


Рис. 1: Локальная нумерация ребер (e_i) и вершин (n_j) гексаэдрального конечного элемента.

Для построения базисных функций введем вспомогательные функции:

$$\begin{aligned} \psi_x^- &= \frac{1}{l_x} \left(x_c + \frac{l_x}{2} - x \right); & \psi_x^+ &= \frac{1}{l_x} \left(x + \frac{l_x}{2} - x_c \right); & \psi_y^- &= \frac{1}{l_y} \left(y_c + \frac{l_y}{2} - y \right); \\ \psi_y^+ &= \frac{1}{l_y} \left(y + \frac{l_y}{2} - y_c \right); & \psi_z^- &= \frac{1}{l_z} \left(z_c + \frac{l_z}{2} - z \right); & \psi_z^+ &= \frac{1}{l_z} \left(z + \frac{l_z}{2} - z_c \right); \end{aligned}$$

где (x_c, y_c, z_c) – центральная точка гексаэдра; l_x, l_y, l_z – длина гексаэдра по осям x, y и z , соответственно.

Базисные функции из пространства $\mathbb{H}^h(\text{rot}; \Omega; 1)$ (векторные базисные функции первого порядка) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= (\psi_y^- \psi_z^-) i; & \bar{N}_2 &= (\psi_y^+ \psi_z^-) i; & \bar{N}_3 &= (\psi_y^- \psi_z^+) i; & \bar{N}_4 &= (\psi_y^+ \psi_z^+) i; \\ \bar{N}_5 &= (\psi_x^- \psi_z^-) j; & \bar{N}_6 &= (\psi_x^+ \psi_z^-) j; & \bar{N}_7 &= (\psi_x^- \psi_z^+) j; & \bar{N}_8 &= (\psi_x^+ \psi_z^+) j; \\ \bar{N}_9 &= (\psi_x^- \psi_y^-) k; & \bar{N}_{10} &= (\psi_x^+ \psi_y^-) k; & \bar{N}_{11} &= (\psi_x^- \psi_y^+) k; & \bar{N}_{12} &= (\psi_x^+ \psi_y^+) k; \end{aligned}$$

где i, j, k – орты, имеющие направление прямоугольных координатных осей Ox, Oy, Oz (в сторону возрастания координаты).

Численные эксперименты

Численные исследования выполнялись на задаче моделирования гармонического электрического поля в области, состоящей из трех подобластей с различными значениями коэффициента электропроводности, причем в одной из подобластей (морская вода) коэффициент электропроводности зависит от глубины (рис. 2).

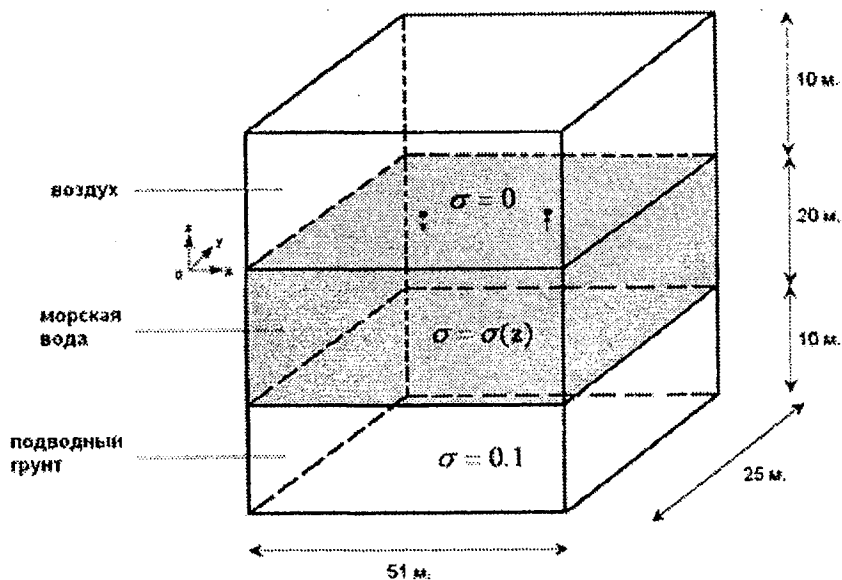


Рис. 2: Расчетная область.

На поверхности морской воды находятся два электрода – положительный и отрицательный, в которых задан ток силой 4 Ампер, частоту тока будем задавать в разных экспериментах разную. Расстояние между электродами – 25 метров.

Для решения таких задач морской геофизики в литературе описываются упрощенные математические модели. Как правило, значение коэффициента электропроводности морской воды задают в виде некоторой константы, полученной путем осреднения измерений коэффициента электропроводности у поверхности воды и вблизи дна. В лучшем случае коэффициент электропроводности задают в виде кусочно-постоянной функции (область морской воды делят на несколько подобластей с постоянным коэффициентом электропроводности). Выбор таких моделей обусловлен двумя факторами. Во-первых, существует ряд хорошо зарекомендовавших себя методов решения задач геофизики со слоистыми средами. Во-вторых, неизвестен подход, который бы позволил правильно учесть все особенности задания коэффициента электропроводности в виде функции. Однако все эти упрощения математической модели не всегда обоснованы. Практика показывает, что результаты, полученные в «полевых» условиях, могут сильно расходиться с результатами, вычисленными с использованием упрощенной математической модели. Далее будут представлены результаты вычислительного эксперимента, которые демонстрируют недостатки упрощенной модели перед предложенным в данной работе подходом.

Пусть частота тока равна 100 Герц, коэффициент электропроводности у поверхности воды $5 \frac{1}{\text{Ом}\cdot\text{м}}$, а вблизи дна $7 \frac{1}{\text{Ом}\cdot\text{м}}$. Функциональная зависимость $\sigma(z)$ является линейной:

$$\sigma(z) = 5 - \frac{z}{10}; \quad (33)$$

На векторной диаграмме поля \vec{E}^{real} (рис. 3), построенной в сечении $y = 12.5$, видно, что численные результаты для различного представления коэффициента электропроводности морской воды отличаются. Особенно ярко это отличие наблюдается в зоне $z = -20$ (морское дно).

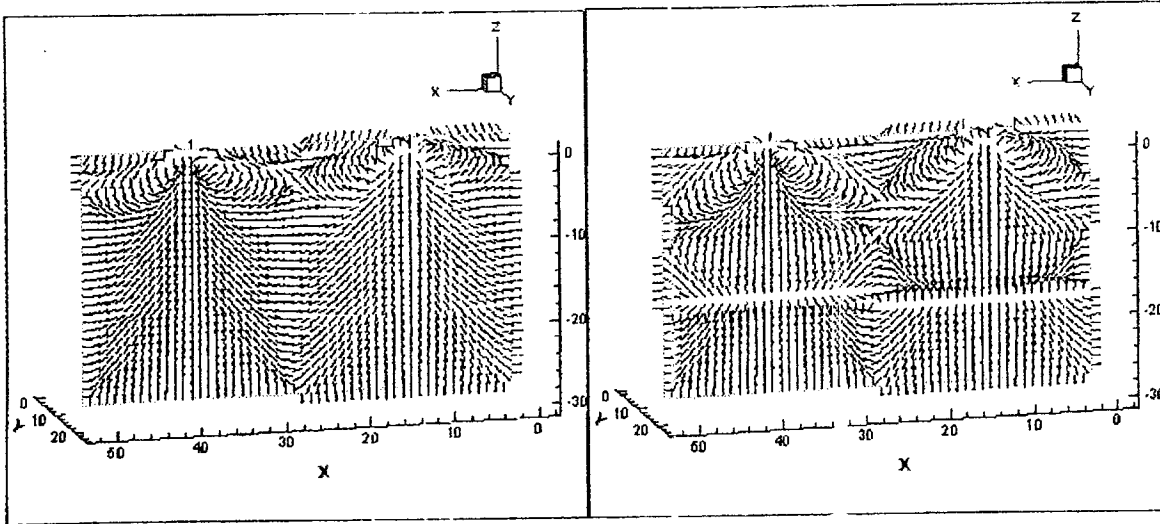


Рис. 3: Векторные диаграммы поля \vec{E}^{real} в сечении $y = 12.5$ (линии векторов имеют равную длину). Слева: осредненное значение $\sigma = 6$.

Справа: линейная зависимость $\sigma(z) = 5 - \frac{z}{10}$.

Такое различие результатов может быть объяснено скопившимися в зоне $z = -20$ (морское дно) электрическими зарядами, наличие которых не учитывается при осреднении коэффициента электропроводности морской воды (см. формулы (10)–(11)). Данный вывод подтверждается графиками зависимости отдельных компонент поля \vec{E}^{real} от x вблизи морского дна (рис. 4–6).

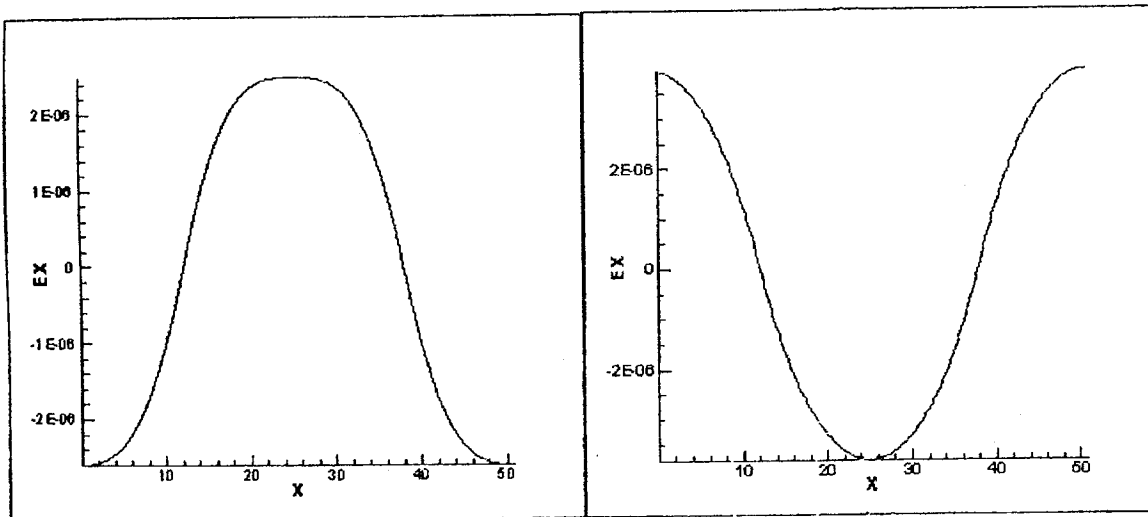


Рис. 4: Графики зависимости \vec{E}_x^{real} от x в сечении $y = 12.5$, $z = -19.5$ (то есть вблизи дна). Слева: осредненное значение $\sigma = 6$.

Справа: линейная зависимость $\sigma(z) = 5 - \frac{z}{10}$.

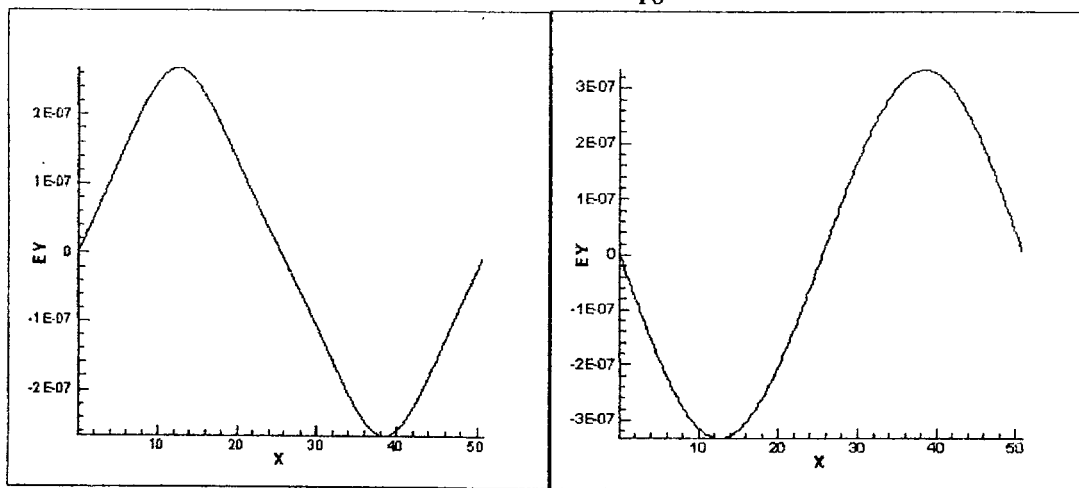


Рис. 5: Графики зависимости \vec{E}_y^{real} от x в сечении $y = 12.5, z = -19.5$ (то есть вблизи дна). Слева: осредненное значение $\sigma = 6$.

Справа: линейная зависимость $\sigma(z) = 5 - \frac{z}{10}$.

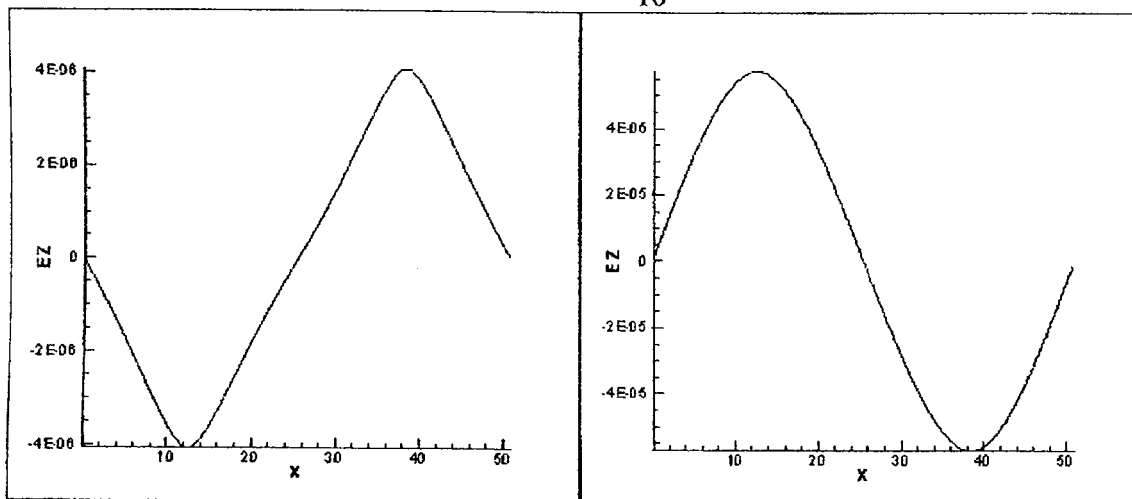


Рис. 6: Графики зависимости \vec{E}_z^{real} от x в сечении $y = 12.5, z = -19.5$ (то есть вблизи дна). Слева: осредненное значение $\sigma = 6$.

Справа: линейная зависимость $\sigma(z) = 5 - \frac{z}{10}$.

Противоположная ориентация графиков на рис. 4–6 свидетельствует о том, что в случае линейной зависимости $\sigma(z) = 5 - \frac{z}{10}$, вблизи морского дна находится второй источник электрического поля (первый источник электрического поля – электроды), которым и являются скопившиеся в зоне $z = -20$ (морское дно) электрические заряды.

Заключение

В качестве дальнейшего развития проделанной работы проводится:

- реализация поставленной задачи на тетраэдральных конечных элементах с базисными функциями высоких порядков для представления более сложных вычислительных областей;
- анализ влияния наличия полезных ископаемых на поведение электромагнитного поля и возможности их обнаружения путем измерений, проводимых на поверхности морской воды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вершинин А.О. Жизнь Черного моря. – Москва: Изд-во Мак-Центр, 2003. – 178 с.
2. Баландин М.Ю., Шурина Э.П. Векторный метод конечных элементов // Учеб. Пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. – 69 с.
3. Saad Y., Schultz M.H. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving non-symmetric linear systems, In: SIAM Journal for Scientific and Statistical Computing. – Vol. 7 (1986). – P. 856–869.
4. Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. – Москва: Физматлит, 1995 – 288 с.
5. Нечаев О.В., Шурина Э.П. Многосеточный алгоритм решения векторным методом конечных элементов трехмерного уравнения Гельмгольца. // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17, № 6. – С. 92–102.